

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**О. І. Кушлик-Дивульська, Б. Р. Кушлик**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ПРОЦЕСІВ  
РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ДЛЯ ОПИСУ  
ПРОЦЕСІВ ПОЛІГРАФІЧНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ  
ПРАКТИКУМ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю 186 «Видавництво та поліграфія»,  
спеціалізацією «Цифрові технології репродукування»*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2017

Рецензенти: *Станжицький О. М.*, д-р фіз.-мат. наук, проф.  
*Зоренко О. В.*, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний  
редактор *Величко О. М.*, д-р техн. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 21.12.2017 р.)  
за поданням Вченої ради ВПІ (протокол № 4 від 20.11.2017 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Кушлик-Дивульська Ольга Іванівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

*Кушлик Богдан Ростиславович*, канд. техн. наук, доц.

## Математичний опис процесів Рівняння математичної фізики для опису процесів поліграфічної технології Практикум

Математичний опис процесів: Рівняння математичної фізики для опису процесів поліграфічної технології. Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія», спеціалізації «Цифрові технології репродукування» / О. І. Кушлик-Дивульська, Б. Р. Кушлик; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3, 95 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 227 с.

Наведено поняття теорії рівнянь математичної фізики, означення, теореми, класичні методи розв'язування задач математичної фізики. Розглянуто основні методи для практичних задач побудованих математичних моделей фізичних процесів, які відповідають навчальній програмі дисципліни «Математичний опис процесів». Наявний широкий спектр задач для самостійного опрацювання, завдання для індивідуальної роботи. Стисло подано розділ «Теорія рядів» та «Елементи математичної статистики». Додатки містять необхідний довідковий матеріал елементів деяких тем курсу вищої математики.

Для студентів ВПІ КПІ ім. Ігоря Сікорського та інших факультетів, інститутів, які вивчають додаткові розділи вищої математики.

© О. І. Кушлик-Дивульська, Б. Р. Кушлик, 2017  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017

## Передмова

Навчальна дисципліна «Математичний опис процесів» належить до навчальних дисциплін професійної та практичної підготовки (за вибором) студентів спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія». Кредитний модуль «Рівняння математичної фізики для опису процесів поліграфічної технології» є другою частиною дисципліни після кредитного модуля «Моделювання засобами векторної алгебри» [8].

Теорія математичних моделей фізичних явищ [4]; займає особливе положення і у математиці, і у фізиці, перебуваючи на стику цих наук. Математична фізика [2] тісно зв'язана з фізикою в тій частині, яка стосується побудови математичної моделі, і в той самий час математична фізика – розділ математики, оскільки методи дослідження моделей є математичними. У поняття методів математичної фізики включаються ті математичні методи, які застосовуються для побудови і вивчення математичних моделей, що описують великі класи фізичних явищ в технологічних процесах, зокрема, в поліграфічних технологіях.

Для вивчення кредитного модуля та його використання для опису процесів поліграфічної технології необхідні знання з теорії числових та функціональних рядів, математичного аналізу, лінійної алгебри та звичайних диференціальних рівнянь [1], [3], [6]. Практикум містить три основні розділи: «Теорія рядів», «Рівняння математичної фізики» [10], [14], [15]. та «Елементи математичної статистики» [11], [12]. Кожен розділ складається із теоретичної частини, питань для самоконтролю, індивідуальних завдань, що суттєво посилює ефективність навчального процесу. Крім теоретичного матеріалу посібник містить значну кількість детально розібраних прикладів розв'язування типових задач.

Розглядаються основні методи дослідження крайових та мішаних задач для лінійних диференціальних рівнянь математичної фізики другого порядку. Особливістю посібника є безпосередній зв'язок між фізичною суттю

розглядуваних явищ, які виникають на виробництві, та математичними методами їх дослідження [16], [17].

Навчальний посібник призначено для роботи зі студентами денної (заочної) форми навчання для поглибленого вивчення спеціальних розділів математики. Його можна використовувати при виконанні домашніх, розрахункових робіт за відповідними темами курсу вищої математики [9]. На основі теоретичної та практичної частин зручно виконувати за темами лабораторні (комп'ютерний практикум) роботи. Також він буде корисним при написанні дипломних робіт магістрами спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія».

Наведено список навчальної літератури, яка допоможе більш повному самостійному опануванню матеріалом.

# Розділ I

## Теорія рядів

### Тема 1. Числові ряди. Ознаки збіжності знакододатних числових рядів. Дослідження збіжності числових рядів

Фактично справу з рядами мали вже стародавні математики. Так, наприклад, Архімед умів знаходити суму геометричної прогресії. У роботах математиків XVIII століття ряди зустрічаються досить часто, проте не завжди звертається увага на питання їх збіжності. Сучасна теорія рядів бере свій початок із робіт німецького математика К. Гаусса, також чеського математика Б. Больцано та французького математика О. Коші. Ряди в математичному аналізі є основним апаратом дослідження функцій. Зокрема, за допомогою рядів можна обчислювати наближені значення функцій. Для початку розглянемо числові ряди.

#### 1.1. Основні поняття для числового ряду

Нехай задана числова послідовність  $\{a_n, n \geq 1\}$ . Вираз

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.1)$$

називається **числовим рядом**, а числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  — членами ряду. Для кожного  $n \in \mathbb{N}$  покладемо

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Якщо існує скінченна границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то її називають **сумою** числового ряду.

**Означення.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називається **збіжним**, якщо він має суму (існує скінченна границя послідовності часткових сум). Якщо послідовність  $\{S_n, n \geq 1\}$  не має скінченної границі, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називається **розбіжним**.

Ряд  $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ , одержаний з ряду (1.1) відкиданням перших його  $m$  членів, називають  $m$ -м залишком ряду.

**Необхідна умова збіжності** числового ряду: для того, щоб числовий ряд збігався, необхідно, щоб

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (1.2)$$

Умова  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  є необхідною, але не достатньою умовою збіжності ряду.

## 1.2. Ознаки збіжності знакододатних числових рядів

Числовий ряд  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , в якого всі члени є невід'ємні числа, називають **додатним** рядом.

**1. Перша ознака порівняння.** Нехай задані два ряди з додатними членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

та

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (2)$$

причому кожний член ряду (1) не більший відповідного члена ряду (2), тобто  $u_n \leq v_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Тоді із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1), а із розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (2).

Дана ознака має зміст, якщо нерівність  $u_n < v_n$  виконується не для всіх  $n$ , а починаючи з деякого номера  $k \in \mathbb{N}$ .

**2. Друга ознака порівняння (в граничній формі).** Якщо існує скінченна та не рівна нулеві границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) = k$ , тоді два ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  одночасно є збіжними або розбіжними.

*Зауваження.* При дослідженні рядів на збіжність за допомогою ознак порівняння треба знати, які ряди збіжні і які є розбіжними. Тому на практиці часто використовують ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{збіжний при } |q| < 1, \\ \text{розбіжний при } |q| \geq 1, \end{cases}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{збіжний при } \alpha > 1, \\ \text{розбіжний при } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Перший ряд є *геометричною прогресією*. Другий ряд називається *рядом Діріхле* або *узагальненим гармонічним рядом*.

### **Достатні ознаки збіжності знакододадних числових рядів**

**Ознака Даламбера.** Якщо для ряду з додатними членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ існує}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = D, \quad (1.3)$$

тоді ряд збіжний при  $D < 1$ , а при  $D > 1$  ряд розбігається.

**Ознака Коші.** Якщо для ряду з додатними членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ існує}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = C, \quad (1.4)$$

тоді ряд збігається при  $C < 1$  та розбігається при  $C > 1$ .

*Зауваження.* За ознакою Коші (в радикальній формі), як і за ознакою Даламбера, не можна встановити збіжність (розбіжність) ряду у випадку існування границі і її рівності 1. У цьому випадку ряд може збігатися, може й розбігатися. Тоді треба досліджувати за допомогою інших ознак.

**Інтегральна ознака (Коші).** Якщо функція  $f(x)$  визначена в проміжку  $1 \leq x < +\infty$  і при  $x \geq a \geq 1$  неперервна, додатна і спадна, то для того щоб збігався числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots,$$

необхідно і достатньо, щоб збігався невластний інтеграл

$$\int_a^{\infty} f(x) dx.$$

### 1.3. Збіжність рядів з довільними членами

Числовий ряд виду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^n u_n + \dots, \quad (1.5)$$

де  $u_n > 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), називають **знакопереміжним** рядом.

**Теорема (ознака Лейбніца).** Знакопереміжний ряд збіжний, якщо абсолютні величини його членів монотонно не зростають, а загальний член прямує до нуля, тобто:

$$1) u_{n+1} \leq u_n, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

**Наслідок** (з теореми Лейбніца). Якщо знакопереміжний ряд задовольняє умови теореми Лейбніца, то  $n$ -й залишок його має знак першого члена і за модулем на перевищує модуля цього члена.

Цей наслідок використовують при застосуванні рядів до наближених обчислень.

Деякі властивості знакопереміжних рядів та рядів з довільним чергуванням знаків.

1) Знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

збіжний, якщо є збіжним ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$$

В цьому випадку початковий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  називається **абсолютно збіжним**.

Збіжний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  називають **умовно збіжним**, якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  розбіжний.



2) Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  абсолютно збіжний, то ряд, утворений будь-якою перестановкою нескінченної множини його членів, абсолютно збіжний і має ту саму суму, що і початковий ряд (умова абсолютної збіжності є суттєвою).

3) Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  умовно збіжний, то при перестановці нескінченної множини його членів його сума може змінитись. Зокрема, при відповідній перестановці членів умовно збіжний ряд можна перетворити в розбіжний ряд.

4) Якщо два числові ряди

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

збіжні абсолютно та мають відповідно суми  $S_1$  і  $S_2$ , тоді є абсолютно збіжним ряд

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + v_1 u_2) + (u_1 v_3 + v_2 u_2 + u_3 v_1) + \dots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots$$

Цей ряд називають *добутком рядів* (за Коші). Його сума також відповідно дорівнює добутку сум  $S_1 S_2$ .

**Приклад 1.** Показати, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збігається абсолютно:

$$\text{а) } a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

*Розв'язування.*

а) Оскільки ряд з абсолютних величин

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

збіжний (ряд Діріхле,  $\alpha = 2$ ), то даний ряд абсолютно збіжний.

б) Складемо ряд з абсолютних величин

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

то ряд з абсолютних величин збіжний.

Отже, досліджуваний ряд абсолютно збіжний.

**Приклад 2.** Довести збіжність знакозмінного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

*Розв'язування.* Послідовність  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}}, n \geq 1 \right\}$  монотонно спадає й прямує до

нуля:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ . Згідно з ознакою Лейбніца ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  збіжний.

Зазначимо, що ряд з абсолютних величин  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  розбіжний (ряд Діріхле,  $\alpha = \frac{1}{2}$ ), тому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  умовно збіжний.

### **Завдання для самоконтролю**

1. Сформулювати основні поняття для числового ряду.
2. Пояснити на прикладах використання необхідної умови збіжності числового ряду.
3. Сформулювати і пояснити практичні застосування ознак порівняння.
4. Достатні ознаки дослідження збіжності знакододатних числових рядів, їх раціональність у використанні.
5. Абсолютна та умовна збіжність числових рядів із довільними членами.
6. Ознака Лейбніца, доцільність її практичного застосування.

### **Індивідуальні завдання**

#### **Варіант 1**

**1.** Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n + 3^n}$ ;      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{10n}{9n+4} \right)^n$ ;      в)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^5 \sqrt{\ln n}}$ ;      г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{9n^3 + 10n + 7}$ .

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{9n^2 + 4} \right)^n$ ;      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+3)!}$ .

### Варіант 2

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$ ;      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left( \frac{n+1}{n} \right)^n}$ ;      в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{4n^2+1} \right)^2$ ;      г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$ .

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}$ ;      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ .

### Варіант 3

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$ ;      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{(n-1)^n}$ ;      в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ;      г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+4}{n+3}$ .

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{(n+1)(n+3)}$ ;      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{3^n}$ .

### Варіант 4

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ ;      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{(2n)^{n+1}}$ ;      в)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ ;      г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ .

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{(n+1)^2}$ ;      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{9n+4}$ .

### Варіант 5

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2+1}{7n^2+4} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right); \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}.$$

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{n+2}{n^2-1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^5}{4^n}.$$

### Варіант 6

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{2^n (2n-1)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2}{3n^2+5} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^6+10}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^n \cdot 5^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{2}{n}.$$

### Варіант 7

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{n^3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n}{3n+1} \right)^n \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{n^6+5}}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$$

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n^2}{1+7n^3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4 \sqrt{n+1}}.$$

### Варіант 8

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{1+n^2}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right).$$

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}}{n+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{n}{3n+2} \right)^n.$$

### Варіант 9

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{\pi}{n^2} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}.$$

**2.** Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(n+4)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{2^n}.$$

### Варіант 10

**1.** Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{1/n^2} - 1 \right); \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5n^2 + 3}}.$$

**2.** Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2n}{n+1} \right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(4n+3)!}.$$

## Тема 2. Функціональні ряди. Степеневі ряди, їх використання в практичних задачах

Функціональні ряди використовують при розв'язуванні практичних задач, де в основному застосування таких рядів полягає в їх дослідженні на збіжність в деякій області. Зокрема, в поліграфічних технологіях, різноманітність технологічних процесів вимагає постійного пошуку задання та дослідження функцій з використанням розкладу в ряд Тейлора і обмеженням певною кількістю членів. Наприклад, в [24], де виписані три перших члени розкладу для  $e^{-2Du}$  в ряд Тейлора, отримано час руху верхньої заготовки від стопи до периферії фрикційних дисків під присмоктуючою дією струменів. В роботі [23], із врахуванням нелінійності, функцію розкладено в степеневий ряд, проведено дослідження нових функціональних можливостей подачі картонних заготовок і розв'язана задача створення компактного пристрою для виготовлення розгорток пакування з картонної стрічки.

### 2.1. Основні поняття та теореми для функціонального ряду

Нехай на множині  $X$  задана послідовність числових функцій  $\{u_n(x), n \geq 1\}$ .

Множина всіх числових сум  $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ , або

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

в кожному з яких точка  $x \in X$  фіксована, називається **функціональним рядом** на множині  $X$ , а функції в ряді – його членами. Множину значень  $x$ , для яких функції  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$  визначені та ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  збігається, називають **областю збіжності** функціонального ряду.

Областю збіжності функціонального ряду найчастіше є проміжок осі  $Ox$ . Кожному значенню  $x$  із області збіжності  $X$  відповідає значення величини

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x)$ , яку називають **сумою функціонального ряду** і позначають  $S(x)$ .

Суму ряду записують у вигляді

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

де

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x), R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

( $R_n(x)$  – залишок функціонального ряду).

Якщо функціональний ряд збігається для довільного фіксованого  $x \in X$  абсолютно, тоді його називають **абсолютно збіжним** рядом на множині  $X$ .

Збіжний функціональний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  називають **рівномірно збіжним** у деякій області  $E \in X$ , якщо для кожного достатньо малого числа  $\varepsilon > 0$  існує таке ціле додатне число  $N$ , що при  $n \geq N$  виконується нерівність  $|R_n(x)| < \varepsilon$  для довільного  $x$  із області  $X$ .

### **Основні теореми для функціонального ряду**

#### **Критерій Вейєрштрасса**

**Теорема** (достатня ознака рівномірної збіжності – **ознака Вейєрштрасса**). Якщо функції  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$  за абсолютною величиною не перевищують в деякій області  $E \in X$  відповідні члени збіжного числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

тоді функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

в цій області збігається рівномірно.

**Зауваження.** Збіжний числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , який задовольняє умови теореми Вейєрштрасса, називається **мажорантним** рядом для функціонального ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ .

#### **Властивості суми рівномірно збіжного функціонального ряду**

**Теорема 1.** Сума  $S(x)$  рівномірно збіжного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  в області  $E \in X$ , де  $u_n(x), n \in \mathbb{N}$  – неперервні функції, також є **неперервною** функцією.

## **Інтегрування та диференціювання функціональних рядів**

### **Теорема2.**

Якщо ряд  $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ , де  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$  -- неперервні функції, рівномірно збіжний в деякій області  $X$  і має суму  $S(x)$ , тоді ряд  $\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \dots + \int_a^b u_n(x)dx + \dots$  збіжний і має суму  $\int_a^b S(x)dx$  (проміжок  $[a, b]$  належить області  $X$ ).

*Зауваження.* Теорему 2 формулюють ще таким чином: *рівномірно збіжний на відрізку  $[a, b]$  ряд, складений з неперервних функцій, можна на цьому відрізку почленно інтегрувати.*

**Теорема3. (Теорема про почленне диференціювання функціонального ряду).** Нехай функції  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$  визначені в деякій області  $X$ , і мають у цій області неперервні похідні

$$u'_1(x), u'_2(x), \dots, u'_n(x), \dots$$

Якщо в даній області ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  збігається рівномірно і якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  збігається хоча б в одній точці, тоді він збігається рівномірно на всій множині і його сума дорівнює похідній від суми початкового ряду :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}'$$

### **2.2. Область збіжності степеневого ряду. Теорема Абеля**

Нехай  $\{a_n, n \geq 1\}$  — послідовність дійсних чисел,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Означення.** *Степеневим рядом* називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

де числа  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  називають *коефіцієнтами* ряду.

Лінійна заміна змінної дозволяє розглядати ряд



$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

дослідження збіжності якого еквівалентно дослідженню збіжності початкового ряду.

**Теорема Абеля.** Якщо степеневий ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$  збіжний при  $x = x_0 \neq 0$ , то він збіжний (і при тому абсолютно) при всіх значеннях змінної таких, що  $|x| < |x_0|$ . Якщо даний ряд розбіжний при  $x = x_1 \neq 0$ , то він розбіжний при всіх  $|x| > |x_1|$ .

У випадку, коли існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , для знаходження **радіуса збіжності** степеневому ряду (впливає із радикальної Коші) застосовують формулу

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

з якої радіус збіжності степеневому ряду (2.2) отримують у вигляді

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Якщо (впливає із ознаки Даламбера) існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ , то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Інтервал  $(x_0 - R, x_0 + R)$  називається **інтервалом збіжності**, а  $R$  – **радіусом збіжності** ряду. Якщо  $R = 0$ , то ряд збігається при  $x = x_0$ ; якщо  $R = +\infty$ , то для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

Для дослідження степеневому ряду на збіжність потрібно знайти його інтервал збіжності і вяснити збіжність цього ряду на кінцях його інтервалу збіжності.

### 2.3. Розклад функції в степеневі ряди. Ряд Тейлора

Нехай  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $0 < r < +\infty$  і функція  $f(x) \in C^{(\infty)}(x_0 - r, x_0 + r)$ .

Степеневий ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

або

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r) \quad (2.3)$$

називається **рядом Тейлора** функції  $f(x)$  в околі точки  $x_0$ . Якщо  $x_0 = 0$ , то ряд називається **рядом Маклорена**.

У випадку, коли функція  $f(x)$  зображується в деякому її околі збіжним до даної функції степеневим рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r),$$

то функція  $f(x)$  нескінченно диференційовна в околі точки і в цьому околі дорівнює сумі свого ряду Тейлора.

Коефіцієнти  $a_n$  степеневого ряду визначають за формулами:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Теорема.** Якщо в деякому околі точки  $x = 0$  функція  $f(x)$  має похідні будь-якого порядку і існує число  $M > 0$  таке, що виконуються нерівності

$$|f^k(x)| \leq M, \quad k \in \mathbb{N},$$

то  $f(x)$  у цьому околі розвивається в ряд Тейлора.

**Розвинення основних елементарних функцій в ряд Маклорена:**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (2.4)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (2.5)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (2.6)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1; \quad (2.7)$$

$$\arctg x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (2.8)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad m \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

Розклад (2.9) має місце в таких випадках: при  $m \geq 0$ , якщо  $x \in [-1; 1]$ , при  $-1 < m < 0$ , якщо  $x \in (-1, 1)$ , при  $m \leq -1$ , якщо  $x \in (-1, 1)$ .

Окремі випадки формули (2.9):

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1; \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1. \quad (2.11)$$

**Приклад 1.** Знайти область збіжності степеневому ряду:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^4}$ ; б)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{3n}$ .

*Розв'язування.*

а) За формулою знаходимо радіус збіжності ряду  $R=1$ . Ряд збігається абсолютно при  $|x-3| < 1$ , тому інтервал збіжності ряду –  $(2, 4)$ . Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

При  $x=2$  одержимо абсолютно збіжний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$ , а при  $x=4$  – збіжний ряд Діріхле  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ . Отже, область збіжності заданого степеневому ряду є відрізок  $[2, 4]$ .

б) Позначимо  $2x^3 = t$ , тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Одержаний ряд збігається, якщо  $|t| < 1$ , і розбігається при  $|t| > 1$ . Таким чином, досліджуваний ряд збігається, якщо  $2|x|^3 < 1$ , тобто при  $|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ , і розбігається при  $|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ . Радіус збіжності ряду  $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ .

У точках  $x = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  даний ряд розбігається. Областю збіжності ряду є інтервал  $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ .

### **Приклади застосування степеневих рядів до наближених обчислень**

**Приклад 2.** Обчислити  $\cos 5^\circ$  з точністю до  $10^{-4}$ .

*Розв'язування.* Спочатку переведемо градусну міру в радіанну:

$$\frac{2\pi}{360} \cdot 5 = \frac{\pi}{36}.$$

Скориставшись формулою (2.6), матимемо

$$\cos 5^\circ = \cos \frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^4 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n-2},$$

при цьому  $\left| r_n(x) \right| \leq \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n}.$

Знайдемо найменше значення  $n$  таке, щоб справджувалася нерівність

$$\frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n} < 10^{-5}.$$

Оскільки  $\frac{\pi}{36} < 0,1$ , то попередня нерівність виконуватиметься, якщо буде

справедлива нерівність  $\frac{1}{(2n)! 10^{2n}} < 10^{-5}$ . Легко бачити, що при  $n = 2$

$$\frac{1}{(2n)! 10^{2n}} = \frac{1}{4! 10^4} < 10^{-5}.$$

Отже, достатньо взяти два перших доданки, тобто

$$\cos 5^\circ = \cos \frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^2.$$

Підставивши в останню формулу замість  $\pi = 3,14159$ , дістанемо значення  $\cos 5^\circ$  з чотирма певними цифрами

$$\cos 5^\circ \approx 0,99619.$$

**Приклад 3.** Обчислити з точністю до  $10^{-4}$  визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^3} dx.$$

*Розв'язування.* Первісна функція для  $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$  не є елементарною. Застосувати формулу Ньютона-Лейбніца не можна. Проте підінтегральна функція  $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$  за допомогою біномного ряду (2.9) для  $|x| < 1$  зображується у вигляді

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+x^3} = & 1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2!} \frac{2}{3^2}x^6 + \frac{1}{3!} \frac{2 \cdot 5}{3^3}x^9 - \frac{1}{4!} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4}x^{12} + \dots + \\ & + \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{n! \cdot 3^n}x^{3n} + \dots \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^3} dx = & \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} x^3 dx - \frac{1 \cdot 2}{2! \cdot 3^2} \int_0^{\frac{1}{2}} x^6 dx + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3! \cdot 3^3} \int_0^{\frac{1}{2}} x^9 dx - \\ & - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{4! \cdot 3^4} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{12} dx + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{n! \cdot 3^n} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{3n} dx + \dots \end{aligned}$$

Після обчислення інтегралів маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^3} dx = & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4 \cdot 2^4} - \frac{1 \cdot 2}{2! \cdot 3^2} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3! \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{10 \cdot 2^{10}} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{4! \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{13 \cdot 2^{13}} + \dots + \\ & + \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{n! \cdot 3^n} \cdot \frac{1}{(3n+1) \cdot 2^{3n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Записаний числовий ряд без першого члена в правій частині рівності є знакозмінний і тому  $n$ -й залишок за модулем менший від модуля першого свого члена.

Розглянемо четвертий член  $\frac{1}{3! \cdot 3^3 \cdot 2^{10}} < 10^{-5}$ , і він задовольняє вказану в умові точність. Тому, взявши в ряді перші три члени, дістанемо

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^3} dx \approx 0,50309,$$

причому перші чотири цифри певні.

**Приклад 4.** Знайти 5 членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння

$$4x^2 y'' + y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \frac{1}{2}.$$

*Розв'язування.* Розв'язок даного рівняння записують у вигляді ряду

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4 + \dots,$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = \frac{1}{2};$$

$$y''(x) = -\frac{y}{4x^2}, \quad y''(1) = -\frac{1}{4};$$

$$y'''(x) = -\frac{y'x^2 - 2xy}{4x^4}, \quad y'''(1) = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 - 2}{4} = \frac{3}{8};$$

$$y^{IV}(x) = -\frac{(y''x^2 + 2xy' - 2y - 2xy')x^4 - 4x^3(y'x^2 - 2xy)}{4x^8}, \quad y^{IV}(1) = -\frac{15}{16}.$$

Підставивши отримані значення похідної в ряд, записують розв'язок диференціального рівняння:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{15}{16 \cdot 4!}(x-1)^4 + \dots,$$

$$y = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5(x-1)^4}{128} + \dots$$

### **Завдання для самоконтролю**

1. Сформулювати теорему Абеля, навести приклад її використання.
2. Сформулювати основні властивості суми степеневого ряду, як рівномірно збіжного функціонального ряду.

3. Отримати розвинення елементарної функції в ряд Тейлора (на вибір) із доведенням.

4. Навести приклади застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

5. Описати технологічний процес в поліграфії із використанням рядів Тейлора.

### **Індивідуальні завдання**

#### **Варіант 1**

1. Знайти область збіжності степеневому ряду.

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n}$ ;                      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$ .

2. Обчислити вказану величину наближено з точністю до  $\alpha$ , використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а)  $\sqrt[3]{80}$ ,  $\alpha = 0,001$ ;                      б)  $\ln 5$ ,  $\alpha = 0,001$ .

3. Обчислити інтеграл  $\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx$  з точністю до  $\alpha = 0,001$ .

4. Знайти  $k$  членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y'' = x \sin y'$ ;  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = \frac{\pi}{2}$ ,  $k = 4$ .

#### **Варіант 2**

1. Знайти область збіжності степеневому ряду.

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ ;                      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}$ .

2. Обчислити вказану величину наближено з точністю до  $\alpha$ , використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а)  $e^2$ ,  $\alpha = 0,001$ ;                      б)  $\cos 2^\circ$ ,  $\alpha = 0,001$ .

3. Обчислити інтеграл  $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$  з точністю до  $\alpha = 0,001$ .

4. Знайти  $k$  членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y'' = xy^2 - y'$ ;  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $k = 4$ .

#### **Варіант 3**

1. Знайти область збіжності степеневому ряду.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

2. Обчислити вказану величину наближено з точністю до  $\alpha$ , використовуючи відповідним чином підібрані функції.

$$\text{a) } \ln 3, \quad \alpha = 0,0001; \quad \text{б) } \ln 2, \quad \alpha = 0,0001.$$

$$3. \text{ Обчислити інтеграл } \int_0^1 \sin x^2 dx \text{ з точністю до } \alpha = 0,001.$$

4. Знайти  $k$  членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y'' - xy' - y = 0$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $k = 5$ .

#### Варіант 4

1. Знайти область збіжності степеневого ряду.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(2n-1)^2 \sqrt{3^n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}.$$

2. Обчислити вказану величину наближено з точністю до  $\alpha$ , використовуючи відповідним чином підібрані функції.

$$\text{a) } \sin 1, \quad \alpha = 0,00001; \quad \text{б) } \sqrt{1,3}, \quad \alpha = 0,001.$$

$$3. \text{ Обчислити інтеграл } \int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x} dx \text{ з точністю до } \alpha = 0,001.$$

4. Знайти  $k$  членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y' = xy + e^y$ ;  $y(0) = 0$ ,  $k = 4$ .

#### Варіант 5

1. Знайти область збіжності степеневого ряду.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}.$$

2. Обчислити вказану величину наближено з точністю до  $\alpha$ , використовуючи відповідним чином підібрані функції.

$$\text{a) } \sqrt[5]{34}, \quad \alpha = 0,001; \quad \text{б) } \ln \frac{5}{2}, \quad \alpha = 0,001.$$

$$3. \text{ Обчислити інтеграл } \int_0^{0,5} \frac{\arctg x^2}{x^2} dx \text{ з точністю до } \alpha = 0,001.$$

4. Знайти  $k$  членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y' = x^2 - y^2$ ;  $y(1) = 2$ ,  $k = 3$ .



### Варіант 6

1. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{n!};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$

2. Обчислити вказану величину наближено з точністю до  $\alpha$ , використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а)  $\sqrt[10]{1027}, \quad \alpha = 0,001;$

б)  $\ln \frac{3}{2}, \quad \alpha = 0,001.$

3. Обчислити інтеграл  $\int_0^{0,4} \sqrt{x} e^{-x/4} dx$  з точністю до  $\alpha = 0,001$ .

4. Знайти  $k$  членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y' = x + x^2 + y^2; \quad y(0) = 1, \quad k = 3$ .

### Варіант 7

1. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n;$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n.$

2. Обчислити вказану величину наближено з точністю до  $\alpha$ , використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а)  $\sqrt[3]{e}, \quad \alpha = 0,001;$

б)  $\cos 10^\circ, \quad \alpha = 0,001.$

3. Обчислити інтеграл  $\int_0^{0,5} \ln(1+x^2) dx$  з точністю до  $\alpha = 0,001$ .

4. Знайти  $k$  членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y' = e^x + y; \quad y(0) = 4, \quad k = 3$ .

### Варіант 8

1. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$

2. Обчислити вказану величину наближено з точністю до  $\alpha$ , використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а)  $\arctg\left(\frac{\pi}{10}\right), \quad \alpha = 0,001;$

б)  $\sqrt[3]{70}, \quad \alpha = 0,001.$

3. Обчислити інтеграл  $\int_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx$  з точністю до  $\alpha = 0,001$ .

4. Знайти  $k$  членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y' = xy + y^2$ ;  $y(0) = 0,1$ ;  $k = 3$ .

### Варіант 9

1. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{11^n}$ .

2. Обчислити вказану величину наближено з точністю до  $\alpha$ , використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а)  $e^{1/2}$ ,  $\alpha = 0,001$ ;

б)  $\sin 18^\circ$ ,  $\alpha = 0,001$ .

3. Обчислити інтеграл  $\int_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$  з точністю до  $\alpha = 0,001$ .

4. Знайти  $k$  членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y'' = e^y \sin y'$ ;  $y(\pi) = 1$ ,  $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$ ,  $k = 3$ .

### Варіант 10

1. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n (n^2 + 1)}$ .

2. Обчислити вказану величину наближено з точністю до  $\alpha$ , використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а)  $e^{-1/5}$ ,  $\alpha = 0,0001$ ;

б)  $\sqrt[3]{500}$ ,  $\alpha = 0,001$ .

3. Обчислити інтеграл  $\int_0^{0,2} \sqrt{x} e^{-x} dx$  з точністю до  $\alpha = 0,001$ .

4. Знайти  $k$  членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$ ;  $y(0) = 1$ ,  $k = 5$ .

### Тема 3. Розвинення функцій в ряд Фур'є. Використання рядів Фур'є для технологічних процесів в поліграфії

У техніці поширені процеси, які через певні проміжки часу повторюються, тобто є періодичними. Прикладами періодичних процесів в поліграфічному процесі можуть бути механічні та електромагнітні коливання, періодичні рухи нанесення фарби тощо. Моделюються періодичні процеси за допомогою періодичних функцій, які практично всі можна розкласти на прості гармоніки, якщо ввести тригонометричні ряди.

Ряди Фур'є широко використовують в поліграфічних технологіях, зокрема в додрукарській підготовці ілюстрованого матеріалу. В ілюстраційному матеріалі [27] описано використання подвійних рядів Фур'є за косинусами для апроксимації зображень. Методи, споріднені розкладу в ряд Фур'є, використовуються також при *jpeg*-стисненню зображень і *mpeg*-стисненню відео.

#### 3.1. Ряд Фур'є за тригонометричною системою функцій

**Означення.** Скінченну чи нескінченну систему (множину) функцій  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$  називають **ортogonalною** на відрізку  $[a, b]$ , якщо будь-які дві різні функції цієї системи ортогональні на цьому відрізку, тобто справджується співвідношення

$$\int_a^b f_k(x)g_j(x)dx = 0 \text{ для } k \neq j, k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}.$$

Прикладом **ортogonalної системи функцій** є тригонометрична система функцій

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots,$$

яка розглядається на проміжку  $[-\pi, \pi]$ .

Доведення ортогональності вказаної тригонометричної системи функцій проводять обчисленням інтегралів від функцій  $1 \cdot \cos nx$ ,  $1 \cdot \sin nx$ ,  $\cos kx \sin jx$ ,  $\sin kx \sin jx$ ,  $\cos kx \sin kx$ ,  $\cos kx \cos jx$ ,  $k \neq j$  на проміжку  $[-\pi, \pi]$ .

**Означення.** Для періодичної з періодом  $2\pi$  та інтегровної на проміжку  $[-\pi, \pi]$  функції  $f(x)$  функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (3.1)$$

називають **тригонометричним рядом Фур'є**, а числа  $a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$  – коефіцієнтами цього ряду, їх обчислюють за формулами, які називають **формулами Ейлера-Фур'є**:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Числа  $a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$ , які визначаються формулами (3.2), називають **коефіцієнтами Фур'є** функції  $f(x)$ .

Кожній інтегровній на відрізку  $[-\pi, \pi]$  функції відповідає свій ряд Фур'є. Оскільки про збіжність ряду (3.1) нічого не відомо, то замість знака « $\Rightarrow$ » ставлять знак « $\sim$ », тобто записують

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (3.3)$$

Має місце теорема.

**Теорема Діріхле (достатні умови зображення функції рядом Фур'є).** Якщо функція  $f(x) \in R([-\pi, \pi])$  –  $2\pi$  – періодична, кусково-диференційовна на відрізку  $[-\pi, \pi]$ , то ряд Фур'є цієї функції збіжний на відрізку  $[-\pi, \pi]$  до функції  $S(x)$ ; при цьому

а)  $S(x) = f(x)$  у точках неперервності функції  $f(x)$ ;

б) у точці  $x_0$  розриву 1-го роду функції:  $S(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ ;

в)  $S(x) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$  на кінцях відрізка.

**Зауваження 1.** Оскільки члени ряду Фур'є (3.3) є періодичні функції і мають спільний період  $2\pi$ , то сума цього ряду (якщо він збігається) буде також

періодичною з періодом  $2\pi$ . Отже, щоб ряд Фур'є функції  $f(x)$  збігався до цієї ж функції, необхідно, щоб  $f(x)$  була періодична з періодом  $2\pi$ , тобто

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

*Зауваження 2.* Якщо  $f(x)$  не є періодичною, а визначеною, наприклад, на деякому відрізку  $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ , то можна побудувати допоміжну інтегровану періодичну функцію  $F(x)$  із періодом  $2\pi$  таку, щоб всередині відрізка  $[a, b]$  вона збігалась з функцією  $f(x)$ . Тоді, якщо ряд Фур'є функції  $F(x)$  збігається до цієї ж функції на відрізку  $[-\pi, \pi]$ , то для  $x \in [a, b]$  він збігається до  $f(x)$ .

Побудова періодичної з періодом  $2\pi$  функції  $\varphi(x)$ , яка дорівнює заданій функції  $f(x)$  на відрізку  $[-\pi, \pi]$  або на деякій його частині у випадку, коли  $f(x)$  визначена на відрізку  $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ , називається *періодичним продовженням функції  $f(x)$* .

### 3.2. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

Нехай функцію  $f(x)$  можна задати на відрізку  $[-\pi, \pi]$  рядом Фур'є. Обчислення коефіцієнтів цього ряду суттєво спрощується, якщо функція  $f(x)$  є парною, або непарною.

У випадку, коли функція  $f(x)$  парна, її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (3.4)$$

де коефіцієнти обчислюють за формулами

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = 0, k \in \mathbb{N},$$

а для непарної функції

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

і ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \quad (3.5)$$

*Зауваження.* Для доведення формул розвинення в ряд Фур'є парної та непарної функції використовують відомі властивості визначеного інтеграла для парної та непарної інтегровної функції на симетричному проміжку інтегрування відносно початку координат.

### 3.3. Ряд Фур'є для $2l$ -періодичної функції

Нехай функцію  $f(x)$  визначена на відрізку  $[-l, l]$ , має період  $2l$  ( $l$  – довільне додатне число) і є на цьому відрізку кусково-монотонною.

Розкладемо її в ряд Фур'є. Зробимо заміну змінної  $x = \frac{lt}{\pi}$  і розглянемо функцію  $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ , яка є визначена і кусково-монотонна на відрізку  $[-\pi, \pi]$ , тому її розклад в ряд Фур'є на цьому відрізку має вигляд

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos kt dt, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin kt dt, \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Повернувшись до змінної  $x$ , отримують розклад в ряд Фур'є функцію  $f(x)$ .

*Рядом Фур'є  $2l$ -періодичної функції  $f(x) \in R([-l, l])$  називається ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (3.6)$$

*де коефіцієнти ряду Фур'є визначаються формулами*

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos kx dx, \quad k \in \mathbb{N}, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned} \quad (3.7)$$

Зазначимо, що за умов, накладених на функцію  $f(x)$ , правильною є теорема про достатні умови зображення  $2l$ -періодичної функції її рядом Фур'є.

*Зауваження.* У випадку  $f(x) \in R([0, l])$  для розвинення в ряд Фур'є потрібно продовжити її на відрізок  $[-l, 0]$  довільним способом

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, l], \\ f^*(x), & x \in [-l, 0]. \end{cases}$$

Доцільно функцію  $f^*(x)$  вибрати так, щоб на відрізку  $[-l, l]$  виконувалась рівність  $F(-x) = F(x)$  (парне продовження функції  $f(x)$ ) або рівність  $F(-x) = -F(x)$  (непарне продовження функції  $f(x)$ ). Ряд Фур'є на відрізку  $[-l, l]$  парної функції  $F(x)$  матиме лише члени з косинусами ( $b_k = 0$ ), а для непарної – із синусами ( $a_k = 0$ ).

### **Приклади розвинення в ряд Фур'є**

**Приклад 1.** Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi, f(x + 2\pi) = f(x).$$

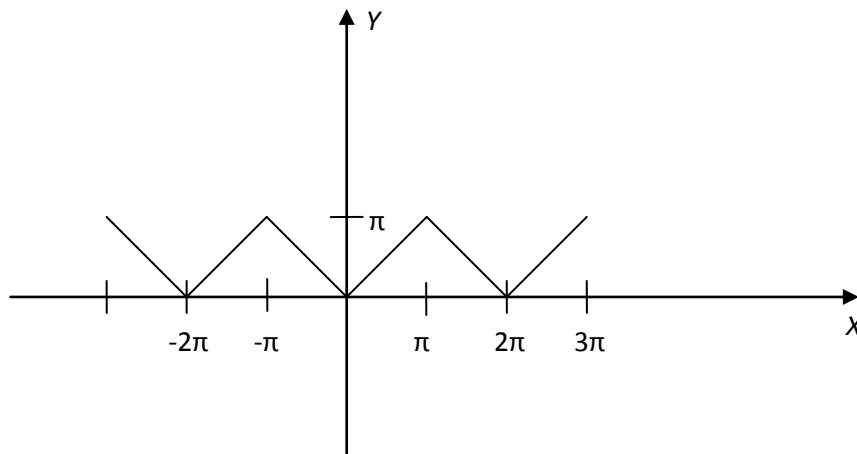


Рис.3.1. Графік  $2\pi$ -періодичної функції  $f(x) = |x|$

*Розв'язування.*

Дана функція є періодичною (рис. 3.1) і на відрізку  $[-\pi, \pi]$  є кусково-диференційовною. Тому вона задовольняє умови теореми Діріхле. Ряд Фур'є збігається на цьому відрізку до функції  $f(x) = |x|$ , тобто

$$|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є  $a_0, a_k, b_k$  за формулами (3.2):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{k} x \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right] = \frac{2}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 1], \quad k=1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin kx dx = 0, \quad k=1, 2, \dots$$

Підставимо значення коефіцієнтів. Маємо

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 1] \cos kx.$$

Число  $[(-1)^k - 1]$  при  $k = 2m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) дорівнює нулю, а при  $k = 2m-1$  дорівнює -2.

Тому остаточно

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Зазначимо, що отриманий ряд не містить членів з синусами. Це не випадково, оскільки  $f(x) = |x|$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$  – парна функція.

**Приклад 2.** Розвинути в ряд Фур'є за синусами функцію  $f(x) = x^2$  в інтервалі  $[0, \pi]$ .

*Розв'язування.* Продовжимо дану функцію на відрізок  $[-\pi, 0]$  непарним способом, а потім періодично з періодом  $2\pi$  на всю дійсну вісь (рис. 3.2).

Визначимо коефіцієнти Фур'є

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx = \left. \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx, \\ dv = \sin kx dx, \\ v = \int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x^2 \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \cos kx dx \right] =$$



$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\pi^2 \cos k\pi}{k} + \frac{2}{k} \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \cos kx dx, \\ v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right| \left( \frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^\pi + \frac{1}{k^2} \cos kx \Big|_0^\pi \right) \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi^2}{4} (-1)^{k+1} + \frac{2}{k^2} [(-1)^k - 1] \right\}, \quad a_k = 0.$$

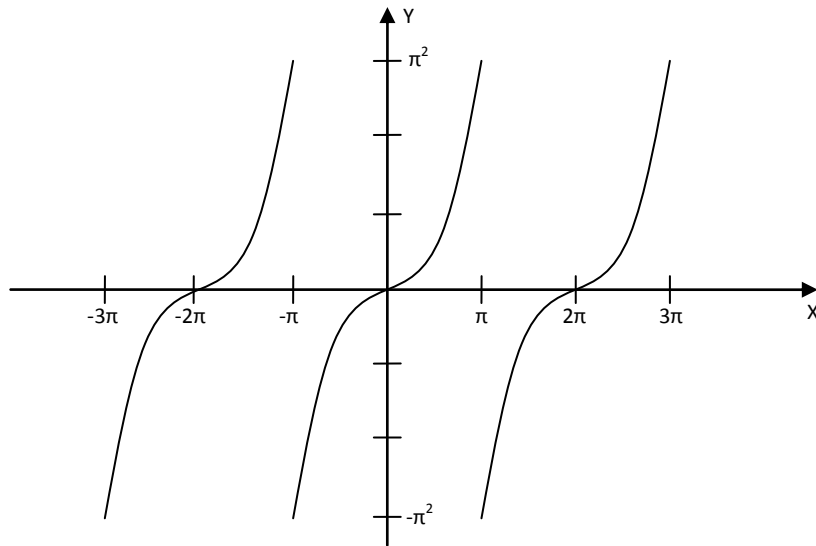


Рис. 3.2. Продовження функції непарним способом.

Отже, 
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\pi^2}{4} (-1)^{k+1} + \frac{2}{k^2} [(-1)^k - 1] \right\} \sin kx.$$

**Приклад 3.** Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію  $f(x) = x^2$  з періодом 2, яка задана в інтервалі  $[-1, 1]$

*Розв'язування.* Дана функція є парною, тому розклад в ряд Фур'є буде містити тільки косинуси і потрібно обчислити  $a_0, a_k$ . Оскільки  $l = 1$ , тоді

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos k\pi x dx,$$

Аналогічно прикладу 2, слід двічі зінтегрувати частинами:

$$a_k = 2 \int_0^1 x^2 \cos k\pi x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx, \\ dv = \cos k\pi x dx, \\ v = \int \cos k\pi x dx = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2 \sin k\pi x}{k} \Big|_0^1 - \frac{4}{k} \int_0^1 x \sin k\pi x dx \right] =$$

$$= -\frac{4}{k\pi} \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \sin k\pi x dx, \\ v = -\frac{1}{k\pi} \cos k\pi x \end{array} \right| \left( -\frac{x \cos k\pi x}{k\pi} \Big|_0^1 + \frac{1}{(k\pi)^2} \sin k\pi x \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{(k\pi)^2} (-1)^k.$$

Отже,

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos k\pi x.$$

### ***Завдання для самоконтролю***

1. Довести ортогональність тригонометричної системи функцій на відрітку  $[-\pi, \pi]$ .
2. Тригонометричний ряд Фур'є, обчислення його коефіцієнтів.
3. Отримати формули обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є для парної та непарної функцій на відрітку  $[-\pi, \pi]$ .
4. Відмінність розвинення в ряд Фур'є для парної та непарної функцій на відрітку  $[-\pi, \pi]$ .
5. Пояснити на прикладах розвинення в ряд Фур'є функції, заданої на відрітку  $[0, \pi]$ .
6. Розвинення в ряд Фур'є  $2l$ -періодичної функції, формули обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є.
7. Подібність та суттєва відмінність інтеграла Фур'є і ряду Фур'є.
8. Записати інтеграл Фур'є для парної та непарної функцій.
9. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію  $f(x)$ , задану на інтервалі  $(0, \pi)$ , продовживши її парним та непарним способом.

$$1. f(x) = e^x. \quad 2. f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases} \quad 3. f(x) = x^2 + 1.$$

### **Індивідуальні завдання**

**Завдання 3.1.** Виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанту, записати ряд Фур'є в розгорнутому вигляді (суму перших елементів ряду), побудувати функцію та її розвинення в записаний ряд (на вибір одне із завдань). Побудову функції та її зображення через тригонометричний ряд виконати за допомогою відомих пакетів програм.

#### **Варіант 1**

**1.** Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом  $\omega = 2\pi$ ) функцію

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad \text{задану на відрізку } [-\pi, \pi].$$

**2.** Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію  $f(x) = \sinh x$ , задану на інтервалі  $(0, \pi)$ , продовживши її парним або непарним способом.

#### **Варіант 2**

**1.** Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом  $\omega = 2\pi$ ) функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ (\pi - x)/2, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad \text{задану на відрізку } [-\pi, \pi].$$

**2.** Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію  $f(x) = 3^{-x/2}$ , задану на інтервалі  $(0, \pi)$ , продовживши її парним або непарним способом.

#### **Варіант 3**

**1.** Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом  $\omega = 2\pi$ ) функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3x - 1, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad \text{задану на відрізку } [-\pi, \pi].$$

**2.** Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію  $f(x) = e^{-x/4}$ , задану на інтервалі  $(0, \pi)$ , продовживши її парним або непарним способом.

#### Варіант 4

1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом  $\omega = 2\pi$ ) функцію

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad \text{задану на відрізку } [-\pi, \pi].$$

2. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію  $f(x) = 5^{-x}$ , задану на інтервалі  $(0, \pi)$ , продовживши її парним або непарним способом.

#### Варіант 5

1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом  $\omega = 2\pi$ ) функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 10x - 3, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad \text{задану на відрізку } [-\pi, \pi].$$

2. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію  $f(x) = (x + 1)^2$ , задану на інтервалі  $(0, \pi)$ , продовживши її парним або непарним способом.

#### Варіант 6

1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом  $\omega = 2\pi$ ) функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x/5 - 2, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad \text{задану на відрізку } [-\pi, \pi].$$

2. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію  $f(x) = e^{3x}$ , задану на інтервалі  $(0, \pi)$ , продовживши її парним або непарним способом.

#### Варіант 7

1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом  $\omega = 2\pi$ ) функцію

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 11, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad \text{задану на відрізку } [-\pi, \pi].$$

2. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію  $f(x) = e^{2x}$ , задану на інтервалі  $(0, \pi)$ , продовживши її парним або непарним способом.

#### Варіант 8

1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом  $\omega = 2\pi$ ) функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3 - 8x, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad \text{задану на відрізку } [-\pi, \pi].$$

2. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію  $f(x) = 3^{-x/2}$ , задану на інтервалі  $(0, \pi)$ , продовживши її парним або непарним способом.

### Варіант 9

1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом  $\omega = 2\pi$ ) функцію

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{x}{3}, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad \text{задану на відрізку } [-\pi, \pi].$$

2. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію  $f(x) = 2^x$ , задану на інтервалі  $(0, \pi)$ , продовживши її парним або непарним способом.

### Варіант 10

1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом  $\omega = 2\pi$ ) функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 5x - 1, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad \text{задану на відрізку } [-\pi, \pi].$$

2. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ -\cos 2x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases} \quad \text{задану на інтервалі } (0, \pi), \text{ продовживши її парним}$$

або непарним способом.

**Завдання 3.2.** Навести приклади використання рядів (інтегралів) Фур'є в поліграфічній технології.

## Розділ II

### Рівняння математичної фізики

#### Тема 4. Постановка задач математичної фізики

**Математична фізика** – це теорія математичних моделей фізичних явищ. Теорія математичного моделювання [5] за допомогою рівнянь із частинними похідними та методи досліджень таких моделей є предметом розділу математики, який називається **рівняннями математичної фізики**.

#### 4.1. Основні поняття та задачі математичної фізики

Провідне місце в рівняннях математичної фізики посідає теорія рівнянь з частинними похідними 2-го порядку.

**Означення.** *Диференціальним рівнянням 2-го порядку з частинними похідними* називають рівняння вигляду

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Найвищий порядок похідної, що входить у рівняння, називається **порядком рівняння** із частинними похідними.

Рівняння з частинними похідними називається **лінійним**, якщо воно є лінійним відносно невідомої функції та її частинних похідних. Загальний вигляд лінійного рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними  $x, y$  такий:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F,$$

де  $A = A(x, y), B = B(x, y), \dots, F = F(x, y)$  – задані функції незалежних змінних  $x, y$ .

**Означення.** *Розв'язком* рівняння з частинними похідними називається всяка функція, яка при підстановці в рівняння замість шуканої функції перетворює його на тотожність за незалежними змінними.

Для однорідного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку

$$\sum_{k=1}^n f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \quad (4.1)$$

де  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , – неперервні функції в деякій області  $D \subset \mathbb{R}^n$ , які одночасно не дорівнюють нулеві в кожній точці області  $D$ , система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n} \quad (4.2)$$

описує **векторні лінії**.

Інтегральні криві системи звичайних диференціальних рівнянь називають **характеристиками** рівняння з частинними похідними.

При дослідженні фізичних задач за допомогою диференціальних рівнянь із частинними похідними вивчається не сам реальний фізичний процес, а деяка його математична модель, від якої вимагається збереження основних рис процесу, що розглядається, й одночасно вона повинна бути настільки простою, щоб піддаватись вивченню математичними методами.

*При побудові математичної моделі можна виділити такі етапи:*

1. Вибір величини  $u$  (або кількох величин), яка характеризує процес. Звичайно ця величина є функцією просторових змінних (у випадку реального тривимірного простору) і часу, тобто  $u = u(x, y, z, t)$ .

2. Виведення диференціального рівняння з частинними похідними відносно функції  $u$  на основі теоретичних передумов, за допомогою яких визначається модель, і законів збереження.

3. Виведення умов, що характеризують процес. Вони впливають із фізичного змісту процесу та дозволяють із нескінченної множини розв'язків диференціального рівняння із частинними похідними вибрати єдиний. Такими доповняльними співвідношеннями найчастіше є крайові умови, які повинна задовольняти функція  $u$  на межі області, де вивчається фізичний процес, і початкові умови, що визначають функцію  $u$  у момент часу, з якого починається процес.

Сукупність диференціального рівняння з частинними похідними і доповняльних умов становлять математичне формулювання фізичної задачі, яка називається *задачею математичної фізики*.

### **Основні рівняння математичної фізики**

#### **1. Хвильове рівняння (рівняння коливань струни)**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t).$$

#### **2. Рівняння теплопровідності**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t).$$

#### **3. Рівняння Пуассона і Лапласа**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g(x, y, z), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Задача математичної фізики поставлена *коректно* (правильно), якщо її розв'язок існує, єдиний і стійкий. *Стійкість* розв'язку означає, що малим змінам в умовах задачі повинні відповідати малі зміни в розв'язку.

Крайові умови визначаються фізичною постановкою задачі та можуть мати різноманітний характер. Для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності в математичній фізиці розглядають **три основні типи крайових умов – першого, другого і третього роду**:

$$\begin{aligned} u|_S &= \mu(x, y, z, t); \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_S &= \nu(x, y, z, t); \\ \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + h(x, y, z)u \right) \Big|_S &= \beta(x, y, z, t), \end{aligned} \tag{4.3}$$

де  $h, \mu, \nu, \beta$  – задані функції своїх аргументів;  $S$  – межа області, в якій розглядається задача;  $\vec{n}$  – орт зовнішньої нормалі до поверхні  $S$ . Крайові умови називаються *однорідними*, якщо їхні праві частини  $\mu(x, y, z, t)$ ,  $\nu(x, y, z, t)$ ,  $\beta(x, y, z, t)$  тотожно дорівнюють нулеві, та *неоднорідними* – в протилежному випадку.

Початкові умови для рівняння коливань мають вигляд



$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y, z),$$

для рівняння теплопровідності

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z),$$

де  $\varphi(x, y, z)$  і  $\psi(x, y, z)$  – задані функції. Початкові умови задаються в усій області зміни просторових змінних  $x, y, z$ .

У математичній фізиці для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності у відповідності з типом крайових умов ставляться **три основні крайові (мішані) задачі**: знайти розв’язок  $u(x, y, z, t)$  хвильового рівняння ( рівняння теплопровідності) в області  $V \times (0, T]$ , який задовольняє на межі  $S$  області  $V$  одну з крайових умов і відповідні початкові умови. Залежно від крайової умови, яка використовується в задачі, крайова задача при цьому називається **першою, другою або третьою крайовою (мішаною) задачею**.

Крім крайових задач, для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності ставиться задача Коші – знайти функцію  $u(x, y, z, t)$ , що задовольняє при  $t > 0$  хвильове рівняння (рівняння теплопровідності) у будь-якій точці  $(x, y, z)$  простору, а також відповідні початкові умови. Таким чином, задача Коші ставиться без крайових умов і в тривимірному просторі її область розв’язання – увесь простір.

Для рівняння Пуассона і Лапласа ставляться тільки крайові задачі, в яких немає початкових умов, оскільки невідома функція  $u$  залежить тільки від просторових змінних – знайти розв’язок  $u(x, y, z)$  рівняння Пуассона (рівняння Лапласа) в області  $V$ , який задовольняє на межі  $S$  області  $V$  одну з крайових умов (4.3), в яких функції  $\mu, \nu, \beta$  не залежать від  $t$ .

## 4.2. Постановка типових задач математичної фізики

### 4.2.1. Лінійна задача про поширення тепла

Розглянемо однорідний стержень довжиною  $l$ , бічна поверхня якого теплоізолювана. Вважатимемо, що стержень настільки тонкий, що в будь-який момент часу температуру у всіх точках поперечного перерізу можна було б вважати однаковою. Якщо кінці стержня підтримувати при сталих

температурах  $u_1$  та  $u_2$ , то, як відомо, вздовж стержня встановиться лінійний розподіл температури  $u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}x$ . При цьому від більш нагрітого кінця стержня буде переходити тепло. Величина теплового потоку вважається додатною, якщо тепло протікає в сторону збільшення  $x$ .

Ми будемо розглядати процес поширення температури в стержні. Цей процес у даному випадку буде описуватись функцією  $u(x, t)$ , що представляє температуру в перерізі  $x$  в момент часу  $t$ .

Процеси, які пов'язані з поширенням тепла, підкоряються наступним фізичним закономірностям.

**Закон Фур'є.** Якщо температура тіла нерівномірна, то в ньому виникають теплові потоки, що направлені з місць з більшою температурою в місця з більш низькою температурою. Кількість тепла, що перетікає за одиницю часу в напрямі осі  $x$  через переріз  $S$ , рівна:

$$q = -S\lambda \frac{\partial u}{\partial x},$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності, що залежить від фізичних властивостей тіла, та в деякій мірі від температури  $u$ , чим, як правило, нехтують.

Для виведення рівняння, якому задовольняє функція  $u(x, t)$ , виділимо деякий елемент  $(x, x + \Delta x)$  стержня. Приріст кількості тепла в цьому елементі за одиницю часу буде:

$$c\rho S\Delta x \frac{\partial u}{\partial t},$$

де  $c$  – питома теплоємність,  $\rho$  – густина матеріалу стержня. При цьому кількість тепла, яка надійшла в цей елемент за одиницю часу через перерізи  $x$  та  $x + \Delta x$ , буде рівною

$$-S\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x - \left( -S\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \right) = -S\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x + S\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x}.$$

Прирівнюючи кількості тепла та поділивши отриману рівність на  $\Delta x$ , отримаємо

$$c\rho S \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-S\lambda \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x + S\lambda \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}}{\Delta x}.$$

Переходячи до границі при  $\Delta x \rightarrow 0$ , отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \text{ або } u_t = a^2 u_{xx}, \quad (4.4)$$

де  $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$  – коефіцієнт теплопровідності.

Рівняння (4.4) має нескінченну кількість частинних розв'язків. При розв'язанні конкретної фізичної задачі необхідно з усіх цих розв'язків вибрати той, який задовольняє деякі додаткові умови, що випливають з її фізичного змісту. Такими додатковими умовами, як правило, є граничні умови та початкові умови.

У випадку, коли на кінцях стержня підтримуються задані температури, такі додаткові умови матимуть вигляд:

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad t \geq 0; \quad u(x,0) = h(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

а повна задача для визначення шуканої функції  $u(x,t)$  прийме вигляд:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_t; \\ u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad t \geq 0; \quad u(x,0) = h(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (4.5)$$

Якщо розглядається нескінченний стержень, вихідна задача (4.5) прийме вигляд:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_t \\ u(x,0) = h(x). \end{cases} \quad (4.6)$$

В середині стержня може виділятися або поглинатися тепло (наприклад, при проходженні струму, внаслідок хімічних реакцій і т. п.). Виділення такого тепла може бути охарактеризовано густиною теплових джерел  $f(x,t)$  у точці  $x$  в момент часу  $t$ . В результаті дії цих джерел на ділянці  $(x, x + \Delta x)$  за одиницю часу виділиться додаткова кількість тепла  $s \cdot \Delta x \cdot f(x,t)$ .

Тоді, аналогічно до (4.4), для відшукування функції  $u(x,t)$  отримаємо рівняння у вигляді

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t). \quad (4.7)$$

Якщо стержень неоднорідний, тобто коефіцієнти  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$  різні для різних точок  $x$  і є функціями від  $x$ , то рівняння (4.7) матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( a^2(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

#### 4.2.2. Рівняння дифузії

Якщо середовище нерівномірно заповнене газом, то має місце дифузія його з місць з більш високою концентрацією в місця з меншою концентрацією. Це ж явище спостерігається і в розчинах, якщо концентрація розчиненої речовини в об'ємі не є однаковою. Подібно до попереднього випадку будемо розглядати процес дифузії в порожнистій, досить тонкій трубці, такій, що у будь-який момент часу концентрацію газу в перерізі трубки можна було б вважати однаковою. Тоді процес дифузії може бути описаний деякою функцією  $u(x, t)$ , яка представляє собою концентрацію в перерізі  $x$  в момент часу  $t$ . Згідно з *законом Нернста* маса газу, яка перетікає через переріз  $x$  за одиницю часу  $t$ , дорівнює

$$q = -D \frac{\partial u}{\partial x} \cdot S,$$

де  $D$  – коефіцієнт дифузії.

Складемо рівняння балансу маси газу на ділянці  $(x, x+\Delta x)$

$$S \Delta x \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -DS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x + DS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x},$$

або розділивши рівність на  $\Delta x$  та перейшовши до границі при  $\Delta x \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Якщо коефіцієнт дифузії постійний, то рівняння дифузії матиме вид

$$u_t = D u_{xx}.$$

Аналогічно до попереднього може бути враховано наявність внутрішніх джерел речовини, що приведе до подібного з (4.4) рівняння.

Розглянемо випадок, коли процес дифузії проходить у середовищі, що рухається з постійною швидкістю  $V$ . Тоді у рівнянні балансу маси газу на ділянці  $(x, x + \Delta x)$  потрібно додатково врахувати кількість речовини, що проходить через переріз ділянки за рахунок переносу рухомого середовища, яка рівна

$$+V \cdot S \cdot u|_x - VSu|_{x+\Delta x}.$$

Тоді рівняння прийме вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) - V \frac{\partial u}{\partial x}.$$

#### 4.2.3. Задачі поширення тепла у просторі

Процес поширення тепла у просторі може бути охарактеризований температурою  $u(x, y, z, t)$ . Якщо температура не однакова, то виникають теплові потоки, які будуть спрямовані з місць з більш високою температурою до місць з більш низькою температурою. Використовуючи закон Фур'є для просторового випадку, який матиме вигляд  $q = -S\lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ , де  $\vec{n}$  – нормаль до площадки  $S$ , та як і в попередньому випадку, закон збереження енергії, приходимо до наступного рівняння **теплопровідності** у випадку однорідного середовища:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f,$$

або  $u_t = a^2 \Delta u + f$ , де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

#### 4.2.4. Рівняння малих поперечних коливань струни

Під струною розуміють тонку нитку, яка може вільно згинатись, тобто не створює опору зміні її форми, не пов'язаному із зміною її довжини. Силу натягу  $T$ , що діє на струну, вважатимемо значною, так що можна знехтувати дією сили тяжіння. Нехай у положенні рівноваги струна напрямлена вздовж осі  $Ox$ . Будемо розглядати тільки поперечні коливання струни, вважаючи, що рух проходить в одній площині, і що всі точки струни рухаються перпендикулярно до осі  $Ox$ . Через  $u(x, t)$  позначимо зміщення точок струни в момент часу  $t$  від

положення рівноваги. При кожному фіксованому значенні  $t$  графік функції  $u(x,t)$ , очевидно, дасть форму струни в цей момент часу (рис. 4.1).

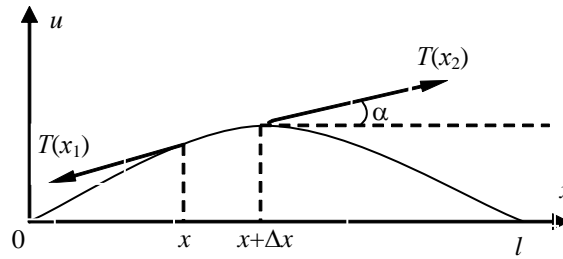


Рис. 4.1. Вигляд струни.

Далі будемо розглядати лише малі коливання струни, такі, що квадратами  $u_x(x,t)$  та  $u(x,t)$ , а також їх добутками можна знехтувати. Довжина дуги на ділянці  $(x, x + \Delta x)$  рівна:

$$S' = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \approx x + \Delta x - x = S.$$

Отже, можемо вважати, що збільшення довжин ділянок струни не виникає. Звідси в силу **закону Гука** матимемо, що величина натягу  $T$  в кожній точці з часом не змінюється. Крім того, сума проекцій на вісь  $Ox$  сил натягу, зовнішніх сил та сил інерції має бути рівна нулю. Оскільки ми розглядаємо лише поперечні коливання, то сили інерції та зовнішні сили направлені вдовж осі  $Ou$ , тоді

$$T(x) \cos \alpha(x) - T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) = 0,$$

але  $\cos \alpha(x) \approx 1$ , тобто  $T(x) \approx T(x + \Delta x)$ . Таким чином, можна вважати  $T(x) = T_0 \approx \text{Const}$ .

Складемо рівняння руху струни. Сума проекцій на вісь  $Ou$  сил, що діють на ділянку  $(x, x + \Delta x)$ , дорівнює  $Y = T_0 \cdot \sin \alpha|_{x+\Delta x} - T_0 \cdot \sin \alpha|_x$ .

Згідно з законами Ньютона, ці сили повинні бути рівні добутку маси цієї ділянки на його прискорення. Тобто в проекції на вісь  $Ou$  отримаємо рівність.

$$T_0 \sin \alpha|_{x+\Delta x} - T_0 \sin \alpha|_x = \rho(x) \cdot \Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (4.8)$$

Оскільки  $\sin \alpha = \frac{tg \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} \approx tg \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$ , а тому з (4.8) отримаємо

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right], \text{ звідки при } \Delta x \rightarrow 0 \text{ маємо}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.9)$$

Це рівняння і називають **рівнянням малих поперечних коливань струни**.

Якщо на струну діють зовнішні сили, густина яких рівна  $F(x, t)$ , то рівняння (4.9) перепишеться у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F,$$

$$\text{або } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \text{ де } f = \frac{F}{\rho}, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}.$$

При  $F \neq 0$  коливання струни називаються **вимушеними**, а при  $F = 0$  – **вільними**.

Для однозначного опису процесу коливання необхідно задати ще додаткові умови. Зокрема, у початковий момент часу потрібно задати положення і швидкість усіх точок струни:

$$u(x, 0) = \psi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_1(x).$$

У випадку обмеженої або напівобмеженої струни задають ще і крайові умови, які, зокрема, можуть бути такими:

– відомо закон руху лівого кінця струни:  $u(0, t) = \mu(t)$ ;

– на правий кінець струни діє сила  $\gamma(t)$ :  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{\gamma(t)}{T_0}$ .

Аналогічно може бути виведене рівняння, що описує малі повздовжні коливання пружного стержня

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( E S \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t),$$

де  $S(x)$  – площа поперечного перерізу стержня;  $E(x)$  – модуль Юнга в точці  $x$ .

#### 4.2.5. Поперечні коливання мембрани

Мембраною називають плоску натягнуту плівку, що не чинить опору згину і зсуву. Для виведення рівняння коливання мембрани, аналогічно до попереднього припускають, що вона в положенні рівноваги розміщена в площині  $xOy$  і займає деяку область  $D$ , що обмежена кривою  $L$ . Мембрана знаходиться під дією рівномірного натягу  $T$ , прикладеного до країв. Тут також розглядаються тільки поперечні коливання мембрани перпендикулярно площині  $xOy$ . Тоді зміщення  $u$  точки  $(x, y)$  мембрани буде функцією від  $x, y, t$ . Розглядаються тільки малі коливання.

Аналогічно до попереднього, з врахуванням згаданих вище припущень, виводяться рівняння малих поперечних коливань мембрани, що мають вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f.$$

#### 4.2.6. Задачі гідродинаміки та поширення звукових хвиль

Нехай рідина рухається з швидкістю  $V(x, y, z, t)$ , проекції якої на осі координат позначимо  $V_x, V_y, V_z$ . В кожний момент часу і в кожній точці рідина знаходиться в деякому стані термодинамічної рівноваги, що визначається тиском  $p(x, y, z, t)$ , густиною  $\rho(x, y, z, t)$ , температурою  $T(x, y, z, t)$ , ентропією  $S(x, y, z, t)$  і внутрішньою енергією  $E(x, y, z, t)$ .

Якщо в рідині немає стоків і витоків, то справедлива рівність

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0.$$

Розглянемо рух ідеальної рідини, тобто рідини, в якій відсутні сили в'язкості. Тоді рівняння руху такої рідини може бути записане у вигляді:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p, \text{ або } \begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$



Коливальні рухи з малими амплітудами в стисливій рідині або газі називають звуковими хвилями.

#### 4.2.7. Стаціонарні задачі для теплових полів

Розглянемо процес поширення тепла у випадку, коли в рівнянні (4.4) можна припустити, що  $u_t = 0$ , тобто теплове поле встановлено, і з часом не змінюється. Тоді ми приходимо до так званого *рівняння Лапласа*:

$$\Delta u = 0. \quad (4.10)$$

При наявності теплових джерел приходимо до *рівняння Пуассона*:

$$\Delta u = -f.$$

Розглянемо деякий об'ємне тіло  $T$ , обмежене поверхнею  $\Sigma$ . Задача про стаціонарний розподіл температури  $u(x, y, z)$  в середині тіла  $T$  формулюється наступним чином: *знайти функцію  $u(x, y, z)$ , що задовольняє всередині  $T$  рівняння  $\Delta u = -f(x, y, z)$  і крайову умову, яка може бути взята в одному з наступних видів:*

I)  $u = f_1$  на  $\Sigma$  (*перша крайова задача*);

II)  $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$  на  $\Sigma$  (*друга крайова задача*);

III)  $\frac{\partial u}{\partial n} = h(u - f_3) = 0$  на  $\Sigma$  (*третья крайова задача*),

де  $f_1, f_2, f_3, h$  – задані функції,  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$  – похідна по зовнішній нормалі до поверхні  $\Sigma$ .

Першу крайову задачу називають *задачею Діріхле*, а другу – *задачею Неймана*.

#### Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати основні поняття, пов'язані з диференціальними рівняннями 2-го порядку з частинними похідними.

2. Визначити основні етапи побудови математичної моделі дослідження фізичної задачі. Навести приклади використання таких задач в поліграфічних технологіях.

3. Записати основні рівняння математичної фізики та дати їм пояснення.
4. Записати початкові та крайові умови для деяких задач математичної фізики.
5. Сформулювати задачу про продовжні коливання однорідного гнучкого стержня довжини  $l$ , який має площу поперечного перерізу  $S$  при будь-яких початкових відхиленнях і швидкості у випадку:
  - а) кінці стержня є вільними;
  - б) на кінці стержня  $x = 0$ ,  $x = l$ , починаючи з моменту  $t = 0$ , діють відповідно сили  $F(t)$  та  $\Phi(t)$  вздовж осі  $Ox$ ;
  - в) кінці стержня закріплені пружно, тобто зазнають опір, пропорційний їх відхиленню;
  - г) лівий кінець стержня зазнає опір, пропорційний швидкості, а правий закріплений жорстко;
  - д) починаючи з моменту часу  $t = 0$  на стержень діє напрямлена вздовж осі  $Ox$  сила (наприклад, сила магнітного поля) об'ємної густини  $f(x, t)$ , а кінці стержня закріплені жорстко;
  - е) лівий кінець стержня закріплений, правий – вільний і до нього прикріплена зосереджена маса  $m$ ;
  - є) кінці стержня є вільними і в точках  $x_i$  ( $0 < x_i < l$ ) стержня є зосереджені маси  $m_i, i = \{1, \dots, n\}$ .

**Зауваження.** Рівняння продовжних коливань гнучкого стержня є рівнянням (4.4), тому потрібно записати тільки початкові і крайові умови.

### **Індивідуальні завдання**

**Завдання 4.1.** Ознайомитись із постановкою наведених нижче задач 1-3 математичної фізики, проаналізувати кожна з них. Поставити задачу математичної фізики, виходячи із реальних технологічних процесів на виробництві.

**Задача 1.** Поставити крайову задачу знаходження температури стержня довжиною  $l$  з теплоізовованою бічною поверхнею, якщо його початкова

температура є сталою. В стержні виділяється тепло від неперервно розподілених в ньому джерел. Розглянути випадки, коли:

- а) на кінцях стержня підтримується задана температура;
- б) на кінці стержня зовні подається заданий тепловий потік;
- в) на кінцях стержня відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого задана.

*Розв'язування.*

Будемо вважати, що стержень має сталий поперечний переріз  $\sigma = const$ . Оскільки поперечні розміри стержня значно менші від його довжини, прийнемо гіпотезу (модель), що поперечні перерізи стержня є ізотермічними поверхнями. Направивши вісь координат  $Ox$  вздовж осі стержня, можемо вважати (у рамках обраної моделі), що температура в стержні буде залежати лише від однієї просторової координати  $x$  і часу  $t$ . При цьому в даній задачі  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ . В якості функції, що характеризує процес, виберемо температуру стержня  $u = u(x, t)$ . Складемо для неї диференціальне рівняння. З цією метою запишемо рівняння теплового балансу (закон збереження теплової енергії) для елемента стержня  $(x, x + \Delta x)$ . Нехай  $k$  – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності стержня. Використовуючи закон Фур'є (закон внутрішньої теплопровідності у твердих тілах)  $q = -k\sigma \frac{\partial u}{\partial n}$  для потоку тепла  $q$  через площадку  $\sigma$  у напрямку нормалі  $\vec{n}$  до неї, запишемо кількість тепла, що надходить в одиницю часу у виділений елемент стержня через перерізи  $x$  і  $x + \Delta x$ :

$$q_1 = -k\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x+\Delta x} - k\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_x = k\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x+\theta\Delta x} \cdot \Delta x,$$

де  $0 < \theta < 1$ . Тут ми скористалися теоремою Лагранжа про скінченні прирости. Крім того, у стержні виділяється тепло від неперервно розподілених у ньому джерел, густину яких позначимо через  $f(x, t)$ . За одиницю часу у виділений елемент стержня від цих джерел надійде кількість тепла  $q_2 = f(x, t)\sigma\Delta x$ . Тепло, що надійшло в стержень, йде на зміну температури у часі. За час  $\Delta t$  температура в точці  $x$  зміниться на величину

$$\Delta_t u = u(x, t + \Delta t) - u(x, t),$$

а за одиницю часу – на величину

$$\frac{\Delta_t u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t).$$

На це буде потрібна кількість тепла, яка дорівнює

$$q_3 = c \rho \sigma \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t) \right).$$

Тут  $\rho$  – густина стержня. Прирівнюючи  $q_1 + q_2 = q_3$  одержуємо

$$k \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x+\theta \Delta x} \Delta x + f(x, t) \Delta x \sigma = c \rho \sigma \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t) \right).$$

Поділимо отриману рівність на  $\sigma \Delta x$  і перейдемо до границі при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ . В результаті остаточно одержимо диференціальне рівняння для функції  $u$  у точці  $(x, t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c \rho} f(x, t), \quad (1.1)$$

де  $a = \sqrt{k/c\rho}$ .

Отримане рівняння називають **рівнянням теплопровідності** (або **рівнянням Фур'є**) для стержня. Його потрібно розглядати при  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ . Початкова умова матиме вигляд:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l. \quad (1.2)$$

Тут  $\varphi(x)$  – відома (задана) функція.

Сформулюємо крайові умови у рамках прийнятої моделі ( $x=0$  і  $x=l$ ) для перерахованих в умові задачі випадків:

а) кінці стержня підтримуються при заданій температурі, тобто

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t > 0. \quad (1.3a)$$

функції  $\mu_1(t)$  і  $\mu_2(t)$  відомі;

б) використовуючи закон Фур'є, можемо відразу записати співвідношення для значень теплових потоків, що подаються у стержень через перерізи  $x=0$  та  $t=0$ :

$$q_1 = -k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad q_2 = k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad t > 0.$$

Звідси матимемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{q_1(t)}{k\sigma}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{q_2(t)}{k\sigma}, \quad t > 0, \quad (1.3б)$$

де  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  – відомі функції.

Якщо  $q_1(t) = q_2(t) = 0$ , то отримаємо крайову умову у випадку теплової ізоляції кінців стержня;

в) у цьому випадку скористаємось законом Ньютона (законом конвективного теплообміну між поверхнею твердого тіла і навколишнім рідким або газоподібним середовищем), згідно якого, кількість тепла  $q$ , що перетікає за одиницю часу через площадку  $\sigma$  поверхні тіла у навколишнє середовище дорівнює  $q = -\sigma h(u - u_0)$ . Тут  $u$  – температура поверхні тіла,  $u_0$  – температура навколишнього середовища,  $h$  – коефіцієнт теплообміну (або коефіцієнт зовнішньої теплопровідності). Тоді на лівому кінці будемо мати

$$k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = h\sigma(u - u_0) \Big|_{x=0},$$

а на правому

$$-k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = h\sigma(u - u_0) \Big|_{x=l}.$$

З цих співвідношень і впливають крайові умови

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h}{k} u \right) \Big|_{x=0} = \frac{h}{k} v_1(t), \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h}{k} u \right) \Big|_{x=l} = \frac{h}{k} v_2(t), \quad t > 0. \quad (1.3в)$$

Тут  $v_1(t)$  і  $v_2(t)$  – значення температури навколишнього середовища біля кінців стержня, що вважаються відомими.

*Зауваження.* У результаті виконання задачі 1 нами поставлено не одну, а декілька різних задач. Перша задача полягає у знаходженні розв'язку рівняння (1.1) в області  $0 < x < l$  при  $t > 0$  та заданих початковій (1.2) та крайових умов (1.3а). Інші відрізняються крайовими умовами, тобто наступними задачами

будуть: (1.1), (1.2), (1.3б) та (1.1), (1.2), (1.3в). Іноді на одному кінці стержня можуть бути задані умови виду (1.3а), а на іншому – виду (1.3б) чи (1.3в).

## Задача 2.

Пружний прямокутний стержень довжини  $l$  виведений зі стану спокою тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі повздовжні зміщення та швидкості. Крім того, на стержень у повздовжньому напрямку діє зовнішня сила з густиною  $f(x,t)$ , яка прикладена з початкового моменту часу. Розглянути випадки, коли:

- а) кінці стержня закріплені жорстко;
- б) кінці стержня рухаються у повздовжньому напрямку за заданим законом;
- в) один кінець стержня закріплений жорстко, а до іншого прикладена розтягуюча сила  $F(t)$ ,  $t > 0$ ;
- г) кінці стержня закріплені пружно, тобто на кожен з кінців з боку кріплення діє повздовжня сила, яка пропорційна зміщенню і направлена протилежно зміщенню.

## Розв'язування.

Як і раніше, направимо вісь  $Ox$  вздовж стержня та помістимо початок координат в один з кінців стержня (наприклад, в лівий), тобто  $0 < x < l$ . Приймаємо гіпотезу (модель), яка полягає в тому, що поперечні перерізи увесь час залишаються плоскими (так звані «малі коливання», коли деформацією поперечних перерізів нехтуємо). Позначимо через  $\rho$  – густину,  $E$  – модуль Юнга матеріалу стержня.

В якості функції, що характеризуватиме повздовжні коливання стержня, виберемо  $u(x,t)$  – величину зміщення (відхилення від положення рівноваги) поперечного перерізу стержня з абсцисою  $x$  у момент часу  $t$ . Розглянемо деякий елемент стержня  $[x, x + \Delta x]$ . Підрахуємо масу  $m = \rho \sigma \Delta x$ , яка зосереджена в точці  $x$  та запишемо закон руху виділеного елемента (другий закон Ньютона):

$$F = ma.$$

Сила  $F$  складається із повздовжніх зовнішніх сил густиною  $f(x,t)$  та внутрішніх сил пружності, які визначаються за **законом Гука**

$$T = E\sigma\varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  – відносне видовження. Знайдемо значення  $\varepsilon$ . Стержень, довжина якого в початковий момент часу  $l_0 = \Delta x$ , після початку коливальних у момент часу  $t > 0$  має довжину  $l_1 = u(x + \Delta x, t) - u(x, t) + \Delta x$ , тому

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\theta\Delta x}.$$

Спрямувавши  $\Delta x \rightarrow 0$ , одержимо  $\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Тому згідно із законом Гука

маємо:

$$T = -E\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x + E\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} = E\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x+\theta\Delta x} \cdot \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Запишемо тепер закон руху елемента стержня  $\Delta x$ . З огляду на те, що прискорення  $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ , можемо записати

$$f(x,t)\sigma\rho\Delta x + E\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x+\theta\Delta x} \cdot \Delta x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho\sigma\Delta x.$$

Поділивши останній вираз на  $\sigma\Delta x$  та спрямувавши після цього  $\Delta x$  до нуля, одержимо рівняння в для точки  $(x,t)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),$$

де  $a^2 = \frac{E}{\rho} > 0$ .

Згідно з умовою задачі, у початковий момент часу нам відомі початкові зміщення  $u(x,0) = \varphi_0$ ,  $0 \leq x \leq l$  та початкові швидкості  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ .

Запишемо тепер крайові умови для перерахованих вище випадків:

а)  $u(0,t) = u(l,t) = 0$ ,  $t \geq 0$ , оскільки кінці стержня  $x = 0$  та  $x = l$  закріплені жорстко;

б)  $u(0,t)=\mu_1(t)$ ,  $u(l,t)=\mu_2(t)$ ,  $t \geq 0$ , де  $\mu_1$  та  $\mu_2$  – задані функції;

в) кінець  $u|_S = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$  закріплений жорстко, отже,  $u(0,t)=0$ ,  $t \geq 0$ .

До кінця  $x=l$  прикладена розтягуюча сила  $F(t)$ . Тоді для граничного елемента  $[l-\Delta x, l]$ , згідно з другим законом Ньютона, будемо мати:

$$\rho\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x = F(t) - E\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{l-\Delta x},$$

звідки при  $\Delta x \rightarrow 0$  остаточно одержимо крайову умову

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{1}{E\sigma} F(t), \quad t > 0;$$

г) на кінець  $x=0$  діє повздовжня сила  $-ku(0,t)$ , а з правого боку на елемент  $[0, \Delta x]$  діє сила пружності  $E\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Delta x}$ , тоді згідно з другим законом

Ньютона будемо мати:

$$\rho\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x = E\sigma \frac{\partial u(\Delta x, t)}{\partial x} - ku(0, t).$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  одержимо крайову умову на кінці  $x=0$ :

$$0 = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \alpha u(0, t), \quad t > 0, \quad \alpha = \frac{k}{E\sigma}.$$

Аналогічно на кінці  $x=l$ :  $\sigma\rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -E\sigma \frac{\partial u(l-\Delta x, t)}{\partial x} - ku(x, t) \Big|_{x=l}$ , або

при  $\Delta x \rightarrow 0$ :  $0 = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} + \alpha u(l, t), \quad t > 0, \quad \alpha = \frac{k}{E\sigma}.$

### Задача 3.

Сформулювати крайову задачу про повздовжні коливання тонкого стержня змінного перерізу, припустивши, що його поперечні перерізи увесь час залишаються плоскими. При цьому один кінець стержня закріплений, а інший розтягнений силою  $F$ , дія якої у початковий момент часу припиняється.



Розв'язування.

Розташуємо стержень уздовж осі  $OX$ . Тоді в якості величини, яка буде характеризувати процес, вибираємо значення зміщення  $u(x, t)$  перерізу  $x$  в момент часу  $t$ . Поперечний переріз стержня є відомою функцією  $\sigma(x)$ . Оскільки стержень тонкий, то масовими силами можна знехтувати. Розглянемо деякий елемент стержня  $[x, x + \Delta x]$ . Приймаючи до уваги закон Гука, матимемо:

$$F_1 = -E\sigma(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x + E\sigma(x + \Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x}.$$

Сили інерції рівні:

$$F_2 = -ma = - \int_x^{x+\Delta x} \rho \sigma(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx = -\rho \sigma(x + \theta \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x+\theta \Delta x} \cdot \Delta x,$$

де  $0 < \theta < 1$ .

Тоді закон руху запишеться:

$$\left( E\sigma(x + \Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \sigma(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right) - \rho \sigma(x) \frac{\partial^2 u(x + \theta \cdot \Delta x)}{\partial t^2} \Delta x = 0$$

або

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+\tilde{\theta} \Delta x} \cdot \Delta x = \rho \sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x+\theta \Delta x} \cdot \Delta x, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < \tilde{\theta} < 1.$$

Поділивши на  $\Delta x$  та перейшовши до границі при  $\Delta x \rightarrow 0$  в останній рівності, одержимо рівняння:

$$\frac{1}{\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Нехай кінець  $x=0$  стержня закріплений, тоді  $u(0, t) = 0$ . Для другого кінця  $x=l$ , який в початковий момент часу розтягнений силою  $F$ , згідно з законом Гука матимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{t=0} = \frac{F}{E\sigma} \quad \text{або} \quad u(x, 0) = \frac{F}{E\sigma} x.$$

Таким чином, початковими умовами будуть:  $u(x, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ .

Крайові умови мають вигляд:  $u(0,t) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$  (оскільки дія сили при

$t > 0$  припиняється).

#### Завдання 4.2.

1. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура  $f(x)$ , на кінці  $x=0$  підтримується нульова температура, а на кінець  $x=l$  зовні подається тепловий потік.

2. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура  $f(x)$ , на кінці  $x=0$  підтримується температура  $u_0 = const$ , а на кінці  $x=l$  відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулю.

3. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура  $u_0$ , на кінці  $x=0$  підтримується постійна температура  $u_1$ , а на кінці  $x=l$  – температура  $u_2$ .

4. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура  $g(x)$ , на кінець  $x=0$  зовні подається тепловий потік, а на кінці  $x=l$  відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулю.

5. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$ , якщо його початкова температура  $u_0 = const$ , на кінці  $x=0$  підтримується постійна температура  $u_1$ , а на кінці  $x=l$  відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулю. В стержні виділяється тепло від неперервно розподілених в ньому джерел.

6. Записати математичну постановку задачі про коливання стержня довжиною  $l$ , який виведений зі стану рівноваги тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі повздовжні зсуви та швидкості. Кінець стержня  $x=0$  закріплений жорстко, а правий  $x=l$  – пружно.

7. Записати математичну постановку задачі про коливання стержня довжиною  $l$ , який виведений зі стану рівноваги тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі швидкості. До кінця стержня  $x=0$  прикладена розтягуюча сила  $F(t)$ ,  $t>0$ , а правий  $x=l$  закріплений жорстко.

8. Записати математичну постановку задачі про коливання стержня довжиною  $l$ , який виведений зі стану рівноваги тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі повздовжні зсуви. Кінець стержня  $x=0$  закріплений пружно, а правий  $x=l$  рухається за законом  $A\sin\omega t$ .

9. Записати математичну постановку задачі про коливання стержня довжиною  $l$ , який виведений зі стану рівноваги тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі повздовжні зсуви та швидкості. Кінець стержня  $x=0$  закріплений пружно, а правий  $x=l$  – жорстко. На стержень діє зовнішня сила з щільністю  $f(x,t)$ , яка прикладена з початкового моменту часу.

10. Записати математичну постановку задачі про коливання стержня довжиною  $l$ , який виведений зі стану рівноваги тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі швидкості. До кінця стержня  $x=0$  рухається за законом  $A\cos\omega t$ , а правий  $x=l$  закріплений жорстко. На стержень діє зовнішня сила з щільністю  $f(x,t)$ , яка прикладена з початкового моменту часу.

## Тема 5. Типи диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку у випадку двох незалежних змінних

### 5.1. Типи диференціальних рівнянь

**Означення.** Диференціальне рівняння із частинними похідними другого порядку

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (5.1)$$

де  $A = A(x, y), B = B(x, y), C = C(x, y)$ , лінійне відносно старших похідних, називається **квазілінійним**.

Звичайні диференціальні рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y), \quad (5.2)$$

де

$$\lambda_1(x, y) = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \lambda_2(x, y) = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

називаються **диференціальними рівняннями характеристик**.

Інтегральні криві рівнянь характеристик

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2$$

називають **характеристиками** квазілінійного рівняння (5.1).

Рівняння (5.1) за допомогою заміни змінних зводиться до канонічного вигляду, який залежить від знака дискримінанта  $\Delta = B^2 - AC$ .

При  $\Delta > 0$  рівняння (5.1) називається **рівнянням гіперболічного типу**, рівняння (5.2) визначають при цьому дві сім'ї дійсних характеристик. За допомогою заміни змінних

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

рівняння (5.1) зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Іноді зручніше користуватися другою канонічною формою гіперболічного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi_1 \left( \alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right),$$

яка одержується із попереднього канонічного вигляду за допомогою заміни змінних

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta).$$

При  $\Delta = 0$  рівняння (5.1) називається *рівнянням параболічного типу*. Дві сім'ї дійсних характеристик збігаються між собою. За допомогою заміни змінних

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \omega(x, y)$$

рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Функція  $\omega(x, y)$  вибирається довільно, але повинна виконуватись умова

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При  $\Delta < 0$  рівняння (5.1) називається *рівнянням еліптичного типу*. При цьому функції  $\lambda_1(x, y)$  і  $\lambda_2(x, y)$  будуть комплексно спряженими, а рівняння характеристик визначають дві сім'ї уявних кривих. Функції  $\varphi(x, y)$  і  $\psi(x, y)$  також будуть комплексно спряженими, тобто, якщо  $\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ , тоді  $\psi(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y)$ . Заміною змінних

$$\xi = \alpha(x, y), \quad \eta = \beta(x, y)$$

рівняння (5.1) зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

*Зауваження.* Якщо рівняння (5.1) лінійне

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F$$

і зі сталими коефіцієнтами, то після зведення його до канонічного вигляду знову одержимо лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + D_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + G_1 u + F_1 &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + G_1 u + F_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } \Delta > 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + G_1 u + F_1 = 0 \text{ при } \Delta = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + G_1 u + F_1 = 0 \text{ при } \Delta < 0.$$

## 5.2. Зведення диференціальних рівнянь до канонічного вигляду

**Приклад 1.** Звести до канонічного вигляду рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

*Розв'язування.* Тут  $A = 1$ ,  $B = 2$ ,  $C = 5$ ,  $B^2 - AC = -1$ , тобто дане рівняння еліптичного типу на всій площині.

Складемо диференціальні рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx} = 2 - i, \quad \frac{dy}{dx} = 2 + i.$$

Відокремлюючи змінні,

$$dy - (2 - i)dx = 0, \quad dy - (2 + i)dx = 0,$$

знаходимо дві сім'ї уявних характеристик

$$(y - 2x) + ix = C_1, \quad (y - 2x) - ix = C_2.$$

Для зведення даного рівняння до канонічного вигляду зробимо заміну

$$\xi = y - 2x, \eta = x.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = -2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= -2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = -2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.
\end{aligned}$$

Підставимо значення отриманих частинних похідних другого рівняння в початкове рівняння, тоді

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 8 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$$

і отримуємо канонічний вигляд рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

**Приклад 2.** Звести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

*Розв'язування.* У даному рівнянні  $A = x^2$ ,  $B = -xy$ ,  $C = y^2$ ,  $B^2 - AC = x^2 y^2 - -x^2 y^2 = 0$ , тобто дане рівняння параболічного типу на всій площині.

Сім'я характеристик знаходиться із рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Відокремлення змінних і інтегрування цього рівняння дає

$$\ln x + \ln y = \ln C \Rightarrow xy = C.$$

Робимо заміну змінних

$$\xi = xy, \eta = y,$$

де  $\eta = y$  — функція, для якої

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} y,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} x + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} y \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) y = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) y = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y^2, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) x + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) x + \\
&\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \\
&\quad = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} y \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) y + \frac{\partial u}{\partial \xi} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) y + \frac{\partial u}{\partial \xi} = \\
&\quad = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) y + \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} xy + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} y + \frac{\partial u}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

Знайдені вирази для частинних похідних підставляємо в дане в умові рівняння:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x^2 y^2 - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} xy + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} y + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) 2xy + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) y^2 + \\
+ \frac{\partial u}{\partial \xi} 2xy = 0.
\end{aligned}$$

Зводячи подібні члени, одержуємо канонічний вигляд рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

**Приклад 3.** Визначити тип диференціального рівняння

$$u_{xx} - u u_{yy} + u(x, y) = 0, \quad y \neq 0.$$

*Розв'язування.* Задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з двома незалежними змінними зі змінними коефіцієнтами.

Для визначення типу складемо дискримінант

$$\Delta = y.$$



а) Нехай  $y > 0$ . Тоді рівняння є рівнянням гіперболічного типу. Із відповідного характеристичного рівняння

$$(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$$

знаходимо дві дійсні різні сім'ї характеристик

$$C_1 = x - 2\sqrt{y}, \quad C_2 = x + 2\sqrt{y}.$$

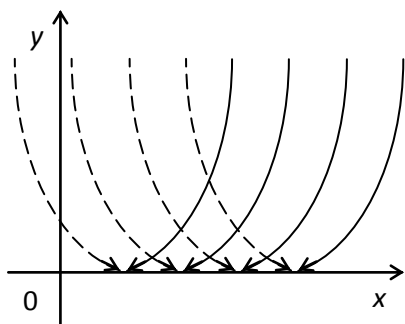


Рис. 6.1.

Характеристиками є праві і ліві вітки сім'ї парабол  $y = 0,25(x - C)^2$  (рис. 6.1). Вершини парабол, які лежать на осі  $Ox$ , не належать характеристикам, тому що в цих точках  $\Delta = 0$  ( $y = 0$  — лінія параболічності).

Вводимо заміну незалежних змінних

$$\xi = x - 2\sqrt{y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{y},$$

яка зведе до канонічного вигляду.

б) В області  $y < 0$  рівняння є рівнянням еліптичного типу. Маємо дві комплексно-спряжені сім'ї характеристик:  $C_3 = x - 2i\sqrt{-y}$ ,  $C_4 = x + 2i\sqrt{-y}$ . Поклавши  $\xi = x$ ,  $\eta = 2\sqrt{-y}$ , отримують канонічний вигляд.

### **Завдання для самоконтролю**

1. Вивести диференціальні рівняння характеристик.
2. Записати основні типи рівнянь із частинними похідними другого порядку.
3. Визначити тип рівняння і звести його до канонічного вигляду:
  - 1)  $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$ ;                      2)  $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$ ;
  - 3)  $y^2u_{xx} - 2xuy_{xy} + x^2u_{yy} = 0$ .

### **Індивідуальні завдання**

#### **Варіант 1**

1. Дати повне визначення, вказати тип диференціального рівняння із частинними похідними (звести до канонічного вигляду)

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2xy u_y = 0, \quad u = u(x, y).$$

*Відповідь.* Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними гіперболічного типу в площині  $E_2 = \{(x, y) | x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)\}$ :  $\xi = xy, \quad \eta = x^{-1}y, \quad xy \neq 0$ .

**2.** Визначити тип рівняння з частинними похідними другого порядку, звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

### Варіант 2

**1.** Дати повне визначення, вказати тип диференціального рівняння із частинними похідними (звести до канонічного вигляду)

$$u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0, \quad u = u(x, y).$$

*Відповідь.* Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними гіперболічного типу в площині  $E_2$ :  $\xi = x + y - \cos x, \quad \eta = x - y + \cos x, \quad u_{\xi\eta} = 0$ .

**2.** Визначити тип рівняння з частинними похідними другого порядку, звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2u - x^2 y = 0.$$

### Варіант 3

**1.** Дати повне визначення, вказати тип диференціального рівняння із частинними похідними (звести до канонічного вигляду)

$$\sin^2 x u_{xx} - 2y \sin x u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y).$$

*Відповідь.* Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними параболічного типу в площині  $E_2$  при  $y \sin x \neq 0$ :  $\xi = y \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \eta = y$ .

**2.** Визначити тип рівняння з частинними похідними другого порядку, звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 4u = 0.$$

### Варіант 4

1. Дати повне визначення, вказати тип диференціального рівняння із частинними похідними (звести до канонічного вигляду)

$$y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0, \quad xy \neq 0, \quad u = u(x, y).$$

*Відповідь.* Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними еліптичного типу в площині  $E_2$  при  $xy \neq 0$ :  $\xi = x^2$ ,  $\eta = y^2$ .

2. Визначити тип рівняння з частинними похідними другого порядку, звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0.$$

### Варіант 5

1. Дати повне визначення, вказати тип диференціального рівняння із частинними похідними (звести до канонічного вигляду)

$$\sin^2 y u_{xx} - 2 \sin y u_{xy} + u_{yy} - 5u_y = u(x, y).$$

*Відповідь.* Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними параболічного типу в площині  $E_2$ ,  $\xi = x - \cos y$ ,  $\eta = y$ .

2. Визначити тип рівняння з частинними похідними другого порядку, звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 9 \frac{\partial u}{\partial x} + 9 \frac{\partial u}{\partial y} - 9u = 0.$$

### Варіант 6

1. Дати повне визначення, вказати тип диференціального рівняння із частинними похідними (звести до канонічного вигляду)

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + 2u_y - x = 0, \quad u = u(x, y).$$

*Відповідь.* Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами еліптичного типу в площині  $E_2$ ,  $\xi = y - 2x$ ,  $\eta = x$ .

2. Визначити тип рівняння з частинними похідними другого порядку, звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 8 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

### Варіант 7

1. Дати повне визначення, вказати тип диференціального рівняння із частинними похідними (звести до канонічного вигляду)

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0, \quad u = u(x, y).$$

*Відповідь.* Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами гіперболічного типу в площині  $E_2$ ,  $\xi = x + y$ ,  $\eta = 3x + y$ .

2. Визначити тип рівняння з частинними похідними другого порядку, звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

### Варіант 8

1. Дати повне визначення, вказати тип диференціального рівняння із частинними похідними (звести до канонічного вигляду)

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_y = 3u(x, y).$$

2. Визначити тип рівняння з частинними похідними другого порядку, звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 4u = 0.$$

### Варіант 9

1. Дати повне визначення, вказати тип диференціального рівняння із частинними похідними (звести до канонічного вигляду)

$$u_{xx} + 6u_{xy} - u_x + 7u_y + 3u = 0, \quad u = u(x, y).$$

2. Визначити тип рівняння з частинними похідними другого порядку, звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} - 5u = 0.$$

### Варіант 10

1. Дати повне визначення, вказати тип диференціального рівняння із частинними похідними (звести до канонічного вигляду)

$$u_{xx} + \ln(x^2 + 2)u_{xy} + 3u_x + 4u(x, y) = 0.$$

**2.** Визначити тип рівняння з частинними похідними другого порядку, звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

## Тема 6. Метод Даламбера для вільних коливань струни

### 6.1. Метод характеристик для рівняння коливання струни

Одновимірне рівняння коливання струни має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

а при  $f = 0$  (відсутня зовнішня сила, яка діє на струну перпендикулярно осі абсцис і розрахована на її одиницю довжини) описує *рівняння вільних коливань струни*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6.1)$$

Розглянемо випадок, коли крайові умови можна не враховувати. Тоді задача полягає у розв'язуванні рівняння (6.1), тобто знаходженні такої функції  $u(x, t)$ , яка задовольняє початкові умови

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (6.2)$$

де  $\varphi(x)$  – задана функція класу  $C^2(-\infty, +\infty)$ , а  $\psi(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$ .

Для розв'язання задачі (6.1), (6.2) зводимо рівняння (6.1) до канонічного вигляду. Маємо

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \Leftrightarrow (dx - a dt)(dx + a dt) = 0,$$

тобто

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0.$$

Інтегруючи останні рівняння, одержуємо

$$C_1 = x - at, \quad C_2 = x + at.$$

Вводимо нові незалежні змінні  $\xi = x - at$ ,  $\eta = x + at$  і підставивши потрібні похідні в рівняння (6.1) та звівши подібні члени, матимемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (6.3)$$

Якщо припустити, що шуканий розв'язок існує, то, підставивши його в рівняння (6.1), одержимо тотожність. Але тоді і канонічна форма також буде тотожністю. Інтегруючи (6.3) за змінною  $\xi$ , одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta),$$

де  $f(\eta)$  – довільна функція. Інтегруючи останню тотожність за другою змінною  $\eta$ , одержуємо

$$u(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Повертаючись до старих незалежних змінних, матимемо

$$u(t, x) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \quad (6.4)$$

де  $f_1(\xi)$  і  $f_2(\eta)$  – довільні функції.

Таким чином, якщо припустити існування розв'язку рівняння (6.1), то він повинен мати вигляд (6.4).

З іншого боку, якщо функції  $f_1(x + at)$ ,  $f_2(x - at)$  є неперервними разом з похідними до 2-го порядку включно в розглядуваній області, то тоді вони є розв'язками рівняння (6.1), і, отже, формула (6.4) дає загальний розв'язок цього рівняння.

Загальний розв'язок рівняння вільних коливань струни вперше одержав Ж. Даламбер в 1747 р.

Визначимо функції  $f_1(x + at)$  та  $f_2(x - at)$  таким чином, щоб розв'язок (6.4) задовольняв початкові умови (6.2). Маємо

$$\begin{cases} u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = a[f_1'(x) - f_2'(x)] = \psi(x), \end{cases}$$

або, зінтегрувавши друге рівняння, одержимо

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + C, \end{cases}$$

де  $x_0$  – фіксована точка, тобто

$$f_1(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2} C,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz - \frac{1}{2}C.$$

Підставивши знайдені функції в (6.4), приходимо до формули Даламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, \quad (6.5)$$

яку в 1748 р. одержав Л. Ейлер.

Покажемо, що якщо  $\varphi(x) \in C^2(-\infty; +\infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$ , то формула Даламбера (6.5) є розв'язком задачі Коші (6.1), (6.2) і цим самим доведемо його існування.

Маємо

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{a}{2} [\varphi_\xi(x+at) - \varphi_\eta(x-at)] + \frac{1}{2} [\psi(x+at) + \psi(x-at)], \\ u_{tt} &= \frac{a^2}{2} [\varphi_{\xi\xi}(x+at) + \varphi_{\eta\eta}(x-at)] + \frac{a}{2} [\psi_\xi(x+at) - \psi_\eta(x-at)], \\ u_x &= \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} [\psi(x+at) - \psi(x-at)], \\ u_{xx} &= \frac{1}{2} [\varphi_{\xi\xi}(x+at) + \varphi_{\eta\eta}(x-at)] + \frac{1}{2a} [\psi_\xi(x+at) - \psi_\eta(x-at)]. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (6.1), одержимо

$$u_{tt} \equiv a^2 u_{xx},$$

а підстановка функції (6.5) в початкові умови (6.2) дає

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{2} [\varphi(x) + \varphi(x)] + \frac{1}{2a} \int_x^x \psi(z) dz \equiv \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \frac{a}{2} [\varphi'(x) - \varphi'(x)] + \frac{1}{2} [\psi(x) + \psi(x)] \equiv \psi(x), \end{aligned}$$

тобто (6.5) є розв'язком задачі Коші (6.1), (6.2). Із побудови розв'язку (6.5) випливає, що він єдиний.

Отже, розв'язок задачі Коші записують у вигляді формули (6.5)

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz,$$



яку називають **формулою Даламбера**, а метод розв'язування хвильового рівняння – **методом характеристик**.

## 6.2. Фізичне пояснення формули Даламбера, її використання

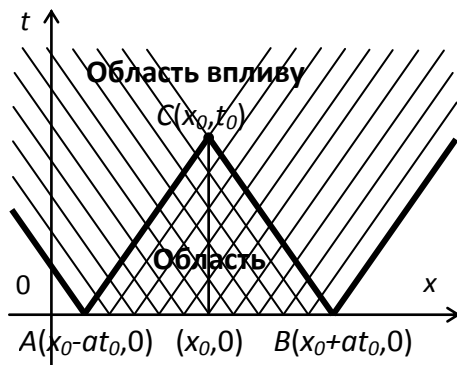


Рис. 6.1

Розв'язок (6.5) є суперпозицією прямих та зворотніх хвиль, які рухаються відповідно в напрямку осі  $Ox$  та в зворотному їй напрямку зі швидкістю  $a$ . Із формули Даламбера випливає, що для обчислення розв'язку  $u(x, t)$  задачі Коші в точці  $(x_0, t_0)$  достатньо знати початкові відхилення  $\varphi(x)$  у двох точках  $x = x_0 + at_0$  і

$x = x_0 - at_0$ , а також початкові швидкості  $\psi(x)$  на відрізку  $x \in [x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ . Значення функцій  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  зовні зазначеного відрізка не впливають на розв'язок  $u(x, t)$  в точці  $(x_0, t_0)$  та в усіх внутрішніх точках трикутника  $ACB$  (див. рис. 6.1), обмеженого характеристиками  $x + at = x_0 + at_0 = \text{const}$ ,  $x - at = x_0 - at_0 = \text{const}$ , які проходять через точку  $C(x_0, t_0)$ . У зв'язку з цим відрізок  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$  називають **областю залежності** розв'язку задачі Коші для точки  $C(x_0, t_0)$ . Сам же трикутник  $ACB$  називають **характеристичним**.

Таким чином, якщо  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  задані на відрізку  $x \in [x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ , то розв'язок задачі Коші визначений в характеристичному трикутнику з основою  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ . Тому трикутник  $ACB$  називають **областю визначеності** відрізка  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ . Із формули Даламбера видно, що початкові умови на відрізку впливають на розв'язок не тільки в характеристичному трикутнику, але й в області, яка обмежена відрізком  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$  і характеристиками  $x + at = x_0 - at_0$  та  $x - at = x_0 + at_0$ . Внаслідок цього зазначену область називають **областю впливу** відрізка  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ .

На підставі наведених вище міркувань можемо сказати: струна називається нескінченною, якщо розглядувана точка  $x_0$  знаходиться від кінців струни на віддалі, більшій за  $at_0$ , де  $t_0$  – розглядуваний момент часу.

*Зауваження 1.* Якщо в (6.2)  $\varphi(x) \notin C^2(-\infty, +\infty)$  або  $\psi(x) \notin C^1(-\infty, +\infty)$ , то маємо так звані **узагальнені розв'язки** задачі Коші (6.1), (6.2), які також даються формулою Даламбера (6.5). У цьому випадку узагальнений розв'язок  $u(t, x)$  може бути і розривною функцією. Розривні розв'язки для рівняння коливання струни і стержня позбавлені фізичного змісту. Однак, таке ж хвильове рівняння задовольняє тиск  $p(x, t)$  газу в довгій вузькій трубці (наприклад, у флейті чи в органній трубці). Функція  $p(x, t)$  може бути розривною. Розривні розв'язки хвильового рівняння в газовій динаміці називаються **ударними хвилями**.

*Зауваження 2.* Розв'язок задачі Коші для рівняння вимушених коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

з початковими умовами (6.2) будується з застосуванням **принципу Дюгамеля** і задається формулою

$$u(x, t) = u(x, t) + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau) dz d\tau,$$

де  $u(x, t)$  визначається формулою Даламбера (6.5).

*Зауваження 3.* Метод характеристик використовують також і для деяких крайових задач. При розв'язуванні задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0;$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \geq 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

також можна використати формулу Даламбера, довизначивши функції  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  при  $x < 0$ : для  $u(0, t) = 0$  при всіх значеннях  $t$  функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$

повинні бути продовжені непарним способом на всю числову вісь. Тоді формула Даламбера має зміст для всіх  $x$  та  $t$  і при  $x \geq 0$  є розв'язком задачі.

### ***Завдання для самоконтролю***

1. Звести рівняння коливань струни до канонічного вигляду.
2. Застосувати метод Даламбера розв'язування вільних коливань струни.
3. Як впливають на процес коливання струни початкові відхилення та початкові швидкості точок струни?
4. Зобразіть процес вільних коливань нескінченної струни на фазовій площині.

### ***Індивідуальні завдання***

**Завдання 1.** Знайти закон вільних коливань однорідної нескінченної струни (записати формули, які описують профіль струни при  $t > 0$  і закон руху точок струни з різними абсцисами) та побудувати на рисунку її профіль в різні моменти часу, якщо:

а) початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівностями

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & |x| > l, \\ 0,01(l - x), & 0 \leq x \leq l, \\ 0,01(l + x), & -l \leq x < 0. \end{cases}$$

б) початкове відхилення в усіх точках рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжку  $x \in [0; l]$ ,  $l = \text{const} > 0$ , де вона рівна  $0,01a$ .

*Зауваження.* Вважати  $l = \text{const}$  датою дня народження студента (магістранта),  $a$  – номером варіанта.

**Завдання 2.** Методом Даламбера знайти розв'язок рівняння коливань необмеженої струни. Побудувати на рисунку профіль струни в різні моменти часу.

$$2.1. u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x.$$

$$2.2. u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = x(x - 2), \quad u_t(x, 0) = x.$$

$$2.3. u_{tt} = 25u_{xx}, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin 3x.$$

$$2.4. u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \cos \omega x.$$

$$2.5. u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = \omega x.$$

$$2.6. u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = x.$$

$$2.7. u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x, 0) = \sin 4x, \quad u_t(x, 0) = \cos x.$$

$$2.8. u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = e^x, \quad u_t(x, 0) = \omega_0.$$

$$2.9. u_{tt} = 16u_{xx}, \quad u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = \cos 2x.$$

$$2.10. u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x, 0) = \cos x, \quad u_t(x, 0) = \sin x.$$

## Тема 7. Розв'язування рівняння коливань струни методом Фур'є

### 7.1. Розв'язування рівняння коливань струни, закріпленої на її кінцях

Розглянемо відповідне рівняння та крайові і початкові умови

$$\begin{aligned}u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Розв'язок цього рівняння (нерівний тотожно нулю) шукають у вигляді добутку двох функцій

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

який підставляють у рівняння

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Відокремивши змінні, отримуємо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Рівність таких двох виразів, які залежать тільки від  $x$  і тільки від  $t$ , можлива тоді й тільки тоді, коли вони дорівнюють сталій величині  $-\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), тобто

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

Загальні розв'язки цих рівнянь мають вигляд

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x, \quad T(t) = C \cos a\sqrt{\lambda} t + D \sin a\sqrt{\lambda} t,$$

де  $A, B, C, D$  — довільні сталі, а функція

$$u(x, t) = (A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x)(C \cos a\sqrt{\lambda} t + D \sin a\sqrt{\lambda} t).$$

Задача знаходження розв'язків рівняння  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ , які задовольняють *крайові умови*, називається *крайовою задачею Штурма-Ліувілля*. У ній потрібно знайти значення параметра  $\lambda$  — так звані *власні значення*, для яких задача має ненульові розв'язки, а також знайти ці розв'язки, які називають *власними функціями*.

Сталі  $A, B$  знаходять із крайових умов:

$$X(0) = A = 0, \quad X(l) = A \cos \sqrt{\lambda} l + B \sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

тобто  $A = 0$  і  $B \sin \sqrt{\lambda} l = 0$ , звідки  $\sqrt{\lambda} = \pi k / l, k \in \mathbb{N}$ . Отже,

$$X_k = B \sin \frac{\pi k}{l} x, k \in \mathbb{N}.$$

Знайдені значення  $\lambda$  називаються **власними значеннями** для даної крайової задачі, а функції  $X_k = B \sin \frac{\pi k}{l} x$  – відповідними **власними функціями**.

При таких  $\lambda$  отримуємо

$$\begin{aligned} T(t) &= C \cos \frac{a\pi k}{l} t + D \sin \frac{a\pi k}{l} t, \\ u_k(x, t) &= \sin \frac{\pi k}{l} x \left( A_k \cos \frac{a\pi k}{l} t + B_k \sin \frac{a\pi k}{l} t \right), k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Кожному значенню  $k$  відповідними є свої сталі значення  $C$  і  $D$ , тому записуємо  $A_k$  та  $B_k$ , де сталу величину  $B$  також включено в  $A_k, B_k$ .

Оскільки рівняння  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  є лінійним та однорідним, то сума розв'язків також є розв'язком, який можна записати у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{l} t \right) \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (7.3)$$

Записаний ряд є розв'язком рівняння, якщо коефіцієнти  $A_k, B_k$  такі, що цей ряд і ряди, утворені після двократного диференціювання за змінною  $x$  та за  $t$ , є рівномірно збіжними рядами. При цьому розв'язок повинен задовольняти початкові умови:  $u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x)$ .

$$u(x, 0) = u_0(x) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k}{l} x = u_0(x).$$

Якщо функція  $u_0(x)$  розкладається в ряд Фур'є на проміжку  $(0, l)$  за синусами, то  $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx$ .

Із другої початкової умови  $u_t(x, 0) = u_1(x)$  маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\pi k a}{l} B_k \right) \sin \frac{\pi k}{l} x = u_1(x),$$

звідки визначаємо також коефіцієнти ряду Фур'є:

$$\frac{\pi k a}{l} B_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx,$$

тобто

$$B_k = \frac{2}{\pi k a} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx.$$

Таким чином, розв'язок рівняння коливань струни записується у вигляді суми нескінченного ряду

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{l} t \right) \sin \frac{\pi k}{l} x,$$

де

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad B_k = \frac{2}{\pi k a} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7.4)$$

#### **Фізична інтерпретація розв'язку**

Покладемо  $\alpha_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ ,  $\operatorname{tg} \theta_k = \frac{A_k}{B_k}$ . Тоді

$$u_k(x, t) = \alpha_k \sin \frac{\pi k}{l} x \cdot \sin \left( \frac{\pi k a}{l} t + \theta_k \right). \quad (7.5)$$

Із формули (7.5) видно, що всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з однією й тією ж частотою  $\omega_k = \pi k a l^{-1}$  і фазою  $\theta_k$ . Амплітуда коливань залежить від абсциси  $x$  точки струни й рівна  $\alpha_k \sin \frac{\pi k}{l} x$ . При такому коливанні всі точки струни одночасно досягають максимального відхилення в той чи інший бік і одночасно проходять положення рівноваги. Такі коливання струни називаються **стоячими хвилями**.

Стояча хвиля  $u_k(x, t)$  матиме стільки нерухомих протягом всього процесу точок, скільки коренів має рівняння  $\sin \frac{\pi k}{l} x = 0$  на проміжку  $x \in [0; l]$ . Таких точок буде  $k + 1$ :  $x = \frac{ml}{k}$ ,  $m = \overline{0, k}$ . Нерухомі точки називаються **вузлами** стоячої хвилі. Посередині між вузлами розташовуються точки, в яких відхилення досягають максимуму; такі точки називаються **пучностями**.

Кожна струна може мати власні коливання лише строго визначених частот  $\omega_k = \pi k a l^{-1}$ . Ці частоти називаються **власними частотами** струни.

Висота тону звучання струни залежить від частоти коливань. Частота  $\omega_1 = \pi l^{-1} \sqrt{T\rho^{-1}}$  ( $T$  – сила натягу,  $\rho$  – густина,  $T\rho^{-1} = a^2$ ) називається частотою основного тону. Інші тони, які відповідають частотам, кратним  $\omega_1$ , називаються **обертонами**.

Розв’язок (7.5) є суперпозицією стоячих хвиль. При цьому характер звучання струни (тон, сила звуку, тембр) залежатиме від співвідношення між амплітудами окремих обертонів.

**Приклад 1.** Знайти розв’язок одновимірної хвильової рівняння

$$u_{tt} = 4/9 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < \infty,$$

який задовольняє крайові  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 0$  при  $t > 0$  і початкові умови  $u(x, 0) = x(x - 1)$ ,  $u_t(x, 0) = 0$  при  $0 < x < 1$ .

*Розв’язування.* За методом Фур’є розв’язок  $u(x, t)$  мішаної задачі для одновимірної хвильової рівняння

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & u(x, 0) &= u_0(x), & u_t(x, 0) &= u_1(x), \\ u(0, t) &= 0, u(l, t) &= 0 \end{aligned}$$

знаходять у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{l} t \right) \sin \frac{\pi k}{l} x,$$

де

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad B_k = \frac{2}{\pi k a} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

За умовою задачі  $u_t(x, 0) = 0$  при  $0 < x < 1$ , тому  $B_k = 0$ . Обчислимо  $A_k$ . Оскільки  $u_0(x) = x(x - 1)$  і довжина відрізка  $l = 1$ , тоді

$$A_k = 2 \int_0^1 x(x - 1) \sin \pi k x dx = 2 \int_0^1 (x^2 - x) \sin \pi k x dx =$$



$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{c} \text{інтегруємо частинами} \\ \int u dv = uv - \int v du, \\ u = x^2 - x, \quad du = (2x - 1)dx, \\ dv = \sin \pi k x dx, \quad v = -\frac{1}{\pi k} \cos \pi k x \end{array} \right| = \\
&= 2(x^2 - x) \left( -\frac{1}{\pi k} \cos \pi k x \right) \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi k} \int_0^1 (2x - 1) \cos \pi k x dx = \\
&= -2(1 - 1) \left( \frac{1}{\pi k} \cos \pi k \right) + 2 \cdot 0 + \\
&+ \frac{2}{\pi k} \left| \begin{array}{c} \text{ще раз інтегруємо частинами} \\ u = 2x - 1, \quad du = 2dx, \\ dv = \cos \pi k x dx, \quad v = \frac{1}{\pi k} \sin \pi k x \end{array} \right| = \frac{2}{\pi k} \left( \frac{2x - 1}{\pi k} \sin \pi k x \right) \Big|_0^1 - \\
&- \frac{2}{\pi k} \cdot \frac{2}{\pi k} \int_0^1 \sin \pi k x dx = \frac{2}{\pi k} \left( \frac{2 - 1}{\pi k} \sin \pi k + \frac{1}{\pi k} \sin 0 \right) - \\
&- \frac{4}{(\pi k)^2} \left( -\frac{1}{\pi k} \cos \pi k x \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{(\pi k)^3} (\cos \pi k - \cos 0) = \frac{4}{(\pi k)^3} ((-1)^k - 1).
\end{aligned}$$

Отже, при парних значеннях  $k = 2n$  маємо  $A_k = A_{2n} = 0$ , а при непарних  $k = 2n - 1$  маємо

$$A_k = A_{2n-1} = \frac{-8}{\pi^3 (2n - 1)^3}.$$

Підставляємо обчислені  $A_k$  та  $B_k = 0$  у формулу для розв'язку:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-8}{\pi^3 (2n - 1)^3} \right) \cos \frac{2\pi(2n - 1)}{3} t \cdot \sin \pi(2n - 1)x = \\
&= -\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - 1)^3} \cos \frac{2\pi(2n - 1)}{3} t \cdot \sin \pi(2n - 1)x.
\end{aligned}$$

Одержаний ряд і його похідні збігаються рівномірно для  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ , що можна довести, скориставшись мажорантою ознакою Вейєрштраса і ознакою Діріхле. Отже,  $u(x, t)$  є розв'язком мішаної задачі.

## 7.2. Розв'язування рівняння коливань струни, закріпленої на одному кінці, та рухомим іншим

Розглянемо на прикладі метод Фур'є відокремлення змінних для рухомого правого кінця струни.

**Приклад 2.** Знайти відхилення  $u(x, t)$  від положення рівноваги закріпленої на кінці  $x = 0$  однорідної горизонтальної струни, правий кінець якої при  $x = l$  рухається так, що дотична до струни залишається весь час горизонтальною. В початковий момент часу струна мала форму  $\frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l}$ , початкових швидкостей не було.

*Розв'язування.* Вважаючи, що для струни розглядаються поперечні коливання, отримуємо таку мішану крайову задачу:

Знайти розв'язок рівняння вільних коливань

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = T_0 / \rho, \quad (7.6)$$

яке задовольняє початкові умови

$$u(x, 0) = \frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l}, \quad u_t(x, 0) = 0$$

і крайові умови

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0.$$

Розв'язок цієї задачі шукаємо також у вигляді  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , який підставляємо у рівняння і отримуємо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Поклавши  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$  і використавши крайові умови, маємо **задачу Штурма-Ліувілля**:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X'(l) = 0,$$

для якої власними числами є значення

$$\lambda_k = \left( \frac{2k-1}{2l} \pi \right)^2,$$

а власними функціями – функції

$$X_k(x) = \sin \frac{2k-1}{2l} \pi x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді при кожному значенні  $k \in \mathbb{N}$  отримуємо рівняння

$$T''(t) + \left( \frac{2k-1}{2l} \pi a \right)^2 T(t) = 0,$$

загальним розв'язком якого є функція

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{2k-1}{2l} \pi a t + B_k \sin \frac{2k-1}{2l} \pi a t.$$

Отже, розв'язками початкового рівняння, які задовольняють крайові умови, є функції

$$\begin{aligned} u_k(x, t) &= T_k(t) X_k(x) = \\ &= \left( A_k \cos \frac{2k-1}{2l} \pi a t + B_k \sin \frac{2k-1}{2l} \pi a t \right) \sin \frac{2k-1}{2l} \pi x, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Із лінійності рівняння випливає, що будь-яка лінійна комбінація цих рівнянь, тобто формально складений ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{2k-1}{2l} \pi a t + B_k \sin \frac{2k-1}{2l} \pi a t \right) \sin \frac{2k-1}{2l} \pi x \quad (7.7)$$

за певних умов на коефіцієнти  $A_k$  та  $B_k$ , які дають можливість його двохкратного почленного диференціювання за  $t$  і за  $x$ , також є розв'язком рівняння (7.6), який задовольняє крайові умови.

Задовольняємо рядом (7.7) початкові умови:

$$u(x, 0) = \frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{2k-1}{2l} \pi x,$$

$$u_t(x, 0) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2l} \pi a B_k \sin \frac{2k-1}{2l} \pi x.$$

Із рівностей випливає, що числа  $A_k$  є коефіцієнтами Фур'є функції

$$\varphi(x) = \frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l} = \frac{1}{30} \left( \sin \frac{7\pi x}{2l} + \sin \frac{15\pi x}{2l} \right)$$

за системою тригонометричних функцій, а власне, за синусами. Обчислення  $A_k$  дають, що  $A_4 = A_8 = 1/30$ , а всі решта значень  $A_k = 0$  при  $k \neq 4, k \neq 8$  та  $B_k = 0, k \in \mathbb{N}$ .

Отже, функція

$$u(x, t) = \frac{1}{30} \left( \cos \frac{7\pi at}{2l} \sin \frac{7\pi x}{2l} + \cos \frac{15\pi at}{2l} \sin \frac{15\pi x}{2l} \right)$$

є розв'язком рівняння.

### ***Завдання для самоконтролю***

1. Загальна схема методу для задач з однорідними рівняннями і крайовими умовами.
2. Властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.
3. Розв'язування рівняння коливань струни, закріпленої на кінцях, методом відокремлення змінних.
4. Власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля для рівняння коливань струни, закріпленої на кінцях.
5. Навести приклади використання рівнянь вільних коливань та руху закріпленої на кінцях струни в поліграфічному обладнанні.

### ***Індивідуальні завдання***

**Завдання 1.** Розв'язати мішані задачі для рівняння коливань обмеженої струни.

1.  $u_{tt} = 16u_{xx}, 0 < x < 2, 0 < t < \infty,$   
 $u(x, 0) = x(x - 2), u_t(x, 0) = 0,$   
 а)  $u(0, t) = 0, u(2, t) = 0;$                       б)  $u(0, t) = 0, u_x(2, t) = 0.$
2.  $u_{tt} = 9u_{xx}, 0 < x < 1, 0 < t < \infty,$   
 $u(x, 0) = x(x - 1), u_t(x, 0) = 0,$   
 а)  $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0;$                       б)  $u(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0.$
3.  $u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 3, 0 < t < \infty,$   
 $u(x, 0) = x(x - 3), u_t(x, 0) = 0,$

- a)  $u(0, t) = 0, u(3, t) = 0;$                       б)  $u(0, t) = 0, u_x(3, t) = 0.$
4.  $u_{tt} = 16u_{xx}, 0 < x < 1, 0 < t < \infty,$   
 $u(x, 0) = x(x - 1), u_t(x, 0) = 0,$   
a)  $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0;$                       б)  $u(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0.$
5.  $u_{tt} = 9u_{xx}, 0 < x < 3/2, 0 < t < \infty,$   
 $u(x, 0) = x\left(x - 3/2\right), u_t(x, 0) = 0,$   
a)  $u(0, t) = 0, u\left(3/2, t\right) = 0;$                       б)  $u(0, t) = 0, u_x\left(3/2, t\right) = 0.$
6.  $u_{tt} = 4u_{xx}, 0 < x < 3, 0 < t < \infty,$   
 $u(x, 0) = x(x - 3), u_t(x, 0) = 0,$   
a)  $u(0, t) = 0, u(3, t) = 0;$                       б)  $u(0, t) = 0, u_x(3, t) = 0.$
7.  $u_{tt} = 1/4 u_{xx}, 0 < x < 2, 0 < t < \infty,$   
 $u(x, 0) = x(x - 2), u_t(x, 0) = 0,$   
a)  $u(0, t) = 0, u(2, t) = 0;$                       б)  $u(0, t) = 0, u_x(2, t) = 0.$
8.  $u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 1/2, 0 < t < \infty,$   
 $u(x, 0) = x\left(x - 1/2\right), u_t(x, 0) = 0,$   
a)  $u(0, t) = 0, u\left(1/2, t\right) = 0;$                       б)  $u(0, t) = 0, u_x\left(1/2, t\right) = 0.$
9.  $u_{tt} = 9u_{xx}, 0 < x < 2, 0 < t < \infty,$   
 $u(x, 0) = x(x - 2), u_t(x, 0) = 0,$   
a)  $u(0, t) = 0, u(2, t) = 0;$                       б)  $u(0, t) = 0, u_x(2, t) = 0.$
10.  $u_{tt} = 1/4 u_{xx}, 0 < x < 3, 0 < t < \infty,$   
 $u(x, 0) = x(x - 3), u_t(x, 0) = 0,$   
a)  $u(0, t) = 0, u(3, t) = 0;$                       б)  $u(0, t) = 0, u_x(3, t) = 0.$

**Завдання 2.** Для мішаної задачі п. б) підібрати початкові умови  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  таким чином, щоб коефіцієнти ряду Фур'є  $A_n, B_n$  набували одного числового значення при конкретному  $n$ . Записати розв'язок та побудувати його в деякі моменти часу.

**Завдання 3.** Навести приклади використання рівнянь вільних коливань та руху закріпленої на кінцях струни в поліграфічному обладнанні.

## Тема 8. Вимушені коливання скінченної струни

### 8.1. Метод Фур'є для вимушених коливань скінченної струни

Для розв'язання поставленої задачі нам необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in (0, l), \quad (8.1)$$

який задовольняє початкові

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l] \quad (8.2)$$

і крайові умови

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (8.3)$$

Будемо шукати розв'язок мішаної задачі (8.1)–(8.3) у вигляді

$$u(x, t) = z(x, t) + v(x, t), \quad (8.4)$$

де  $z(x, t)$  є розв'язком однорідного рівняння коливання струни, який задовольняє умови (8.2), (8.3), а  $v(x, t)$  – розв'язок рівняння (8.1) з однорідними початковими умовами і крайовими умовами (8.3). Згідно з теорією для розв'язку однорідного рівняння маємо

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^l \left[ \frac{1}{l} \varphi(\xi) \cos \frac{\pi n a}{l} t + \frac{1}{\pi n a} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \times \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (8.5)$$

Функцію  $v(x, t)$  шукаємо у вигляді

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (8.6)$$

де  $X_n(x)$  є власними функціями відповідної задачі Штурма-Ліувілля. В нашому випадку  $X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$  (за різних крайових умов одержимо різні власні функції).

Надалі будемо вважати, що ряд (8.6) збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати два рази за змінними  $t$  і  $x$ . Відзначимо, що ряд (8.6) задовольняє крайові умови. Залишилось функції  $T_n(t)$  вибрати таким чином, щоб ряд (8.6) задовольняв рівняння (8.1) і однорідні початкові умови.

Нехай функцію  $f(x, t)$  можна розкласти в ряд Фур'є за системою власних функцій  $\sin \frac{\pi n}{l} x$ . Тоді маємо

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x; \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (8.7)$$

Підставивши (8.6) і (8.7) у рівняння (8.1), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_n''(t) + \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 T_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x = 0.$$

Остання рівність можлива тоді і тільки тоді, коли

$$T_n''(t) + \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t). \quad (8.8)$$

Для того щоб функція  $v(x, t)$  задовольняла однорідні початкові умови, необхідно покласти

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0. \quad (8.9)$$

Інтегруючи задачу Коші (8.8), (8.9), одержуємо

$$T_n(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi n a}{l} (t - \tau) d\tau. \quad (8.10)$$

Підставивши (8.10) у (8.6), а тоді одержаний результат і (8.5) у (8.4), матимемо розв'язок поставленої мішаної задачі

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^l \left[ \frac{1}{l} \varphi(\xi) \cos \frac{\pi n a}{l} t + \frac{1}{\pi n a} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \times \\ & \times \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n a} \int_0^t \int_0^l f(\tau, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \times \\ & \times \sin \frac{\pi n a}{l} (t - \tau) d\tau \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}$$

Можна показати, що одержаний ряд буде розв'язком поставленої задачі, якщо  $f(t, x)$  неперервна, має неперервні похідні за змінною  $x$  до 2-го порядку включно і  $f(t, 0) = f(t, l) = 0$  при  $t \geq 0$ .



*Зауваження.* Якщо в мішаній задачі крайові умови (8.3) неоднорідні, то інтегрування такої задачі завжди можна звести до інтегрування мішаної задачі з однорідними крайовими умовами. Дійсно, нехай нам потрібно знайти розв'язок рівняння (8.1), який задовольняє початкові (8.2) і крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \quad (8.3a)$$

Тоді розв'язок поставленої задачі (8.1) із початковими умовами (8.2) та крайовими (8.3a) шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = \varpi(x,t) + \omega(x,t), \quad (8.11)$$

де  $\omega(x,t)$  – довільна із класу  $C^2(t \geq 0, 0 \leq x \leq l)$  функція, яка задовольняє крайові умови (8.3a). Шукаємо її у вигляді

$$\omega(x,t) = a(t)x + b(t), \quad (8.12)$$

де  $a(t)$  і  $b(t) \in C^2(t \geq 0)$ . Підставивши (8.12) у (8.3a), знаходимо  $b(t) = \mu_1(t)$ ,  $a(t) = (\mu_2(t) - \mu_1(t))/l$ , тобто маємо

$$\omega(x,t) = \mu_1(t) + x(\mu_2(t) - \mu_1(t))/l.$$

Підстановка функції (8.11) у мішану задачу (8.1)–(8.3a) дає

$$\begin{aligned} \varpi_{tt} &= a^2 \varpi_{xx} + f(x,t) - \omega_{tt}, \quad t > 0, \quad x \in (0,l), \\ \varpi(x,0) &= \varphi(x) - \omega(x,0), \quad \varpi_t(x,0) = \psi(x) - \omega_t(x,0), \\ \varpi(0,t) &= 0, \quad \varpi(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0,l], \end{aligned}$$

що і потрібно було показати.

**Приклад.** Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad (8.13)$$

$$u(0,t) = t^2, \quad u(\pi,t) = t^3,$$

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

*Розв'язування.* Якщо при  $x=0, x=l$  задано неоднорідні крайові умови першого роду

$$u(0,t) = \mu^{(1)}(t), \quad u(l,t) = \mu^{(2)}(t),$$

то вводячи заміну

$$u(x, t) = \omega(x, t) + \mu^{(1)}(t) + x \frac{\mu^{(2)}(t) - \mu^{(1)}(t)}{l},$$

ми отримаємо однорідні крайові умови для нової невідомої функції  $\omega(x, t)$ .

В нашому випадку

$$u(x, t) = \omega(x, t) + t^2 + x \frac{t^3 - t^2}{\pi}. \quad (8.14)$$

Тоді, знайшовши похідні  $u_{tt}, u_{xx}$  та підставивши їх у рівняння (8.13), дістанемо наступну першу мішану крайову задачу для нової невідомої функції  $\omega(x, t)$ :

$$\omega_{tt} = \omega_{xx} - 2 - \frac{x}{\pi}(6t - 2),$$

$$\omega(0, t) = 0, \quad \omega(\pi, t) = 0,$$

$$\omega(x, 0) = \sin x, \quad \omega_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

Як відомо, розв'язок крайової задачі

$$\omega_{tt} = a^2 \omega_{xx} + f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in (0, l),$$

$$\omega(0, t) = \omega(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\omega(x, 0) = \varphi(x), \quad \omega_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l]$$

подається у вигляді ряду

$$\begin{aligned} \omega(x, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n a} \int_0^t \int_0^l f(\xi, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \cdot \sin \frac{\pi n a}{l} (t - \tau) d\tau \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x, \end{aligned}$$

де

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Знайшовши  $A_n, B_n$ , ми знайдемо  $\omega(x, t)$ , а з (8.14) – невідому функцію  $u(x, t)$ .

## 8.2. Мішані задачі з стаціонарними неоднорідностями

Розглянемо мішану задачу: знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad t > 0, \quad x \in (0, l), \quad (8.15)$$

який задовольняє початкові і крайові умови

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (8.16)$$

$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2; \quad u_1, u_2 = \text{const}, \quad t \geq 0. \quad (8.17)$$

**Означення.** Мішана задача (8.15)–(8.17) називається *задачею зі стаціонарними неоднорідностями*, якщо права частина рівняння (8.15) і крайові умови (8.19) не залежать від часу.

В цьому випадку розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(x, t) = z(x) - v(x, t), \quad (8.18)$$

де  $z(x)$  – стаціонарне положення струни (статичний прогин), яке визначається із крайової задачі

$$a^2 z_{xx} + f(x) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (8.19)$$

$$z(0) = u_1, \quad z(l) = u_2,$$

а  $v(x, t)$  – відхилення від стаціонарного положення.

Зінтегрувавши крайову задачу (8.19), одержимо

$$z(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (8.20)$$

де

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \xi \left( 1 - \frac{x}{l} \right), & \xi \in [0, x), \\ x \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right), & \xi \in [x, l] \end{cases}$$

Підставивши (8.18) в (8.15)–(8.17) та врахувавши (8.19), матимемо

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0, l),$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) - z(x), \quad v_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l],$$

$$v(0,t)=0, \quad v(l,t)=0, \quad t \geq 0.$$

Маємо

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \left[ (\varphi(\xi) - z(\xi)) \cos \frac{\pi n a}{l} t - \frac{l}{\pi n a} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \times \\ \times \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (8.21)$$

Підставивши (8.20) і (8.21) у (8.18), одержимо розв'язок поставленої мішаної задачі (8.15)–(8.17).

*Зауваження.* Якщо на кінці струни діють сталі сили, то замість крайових умов (8.17) будемо мати

$$u_x(0,t) = u_1, \quad u_x(l,t) = u_2, \quad t \geq 0,$$

а крайова задача (8.19) запишеться у вигляді

$$a^2 z''(x) + f(x) = 0, \quad z'(0) = u_1, \quad z'(l) = u_2.$$

Остання крайова задача може мати безліч розв'язків, або не мати жодного. В цьому випадку викладену вище схему побудови розв'язку мішаних задач з стаціонарними неоднорідностями застосувати не можна.

**Приклад.** Знайти розв'язок мішаної задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + 2x + 3, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (8.22)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (8.23)$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (8.24)$$

*Розв'язування.* Рівняння (8.22) неоднорідне, однак вільний член  $f(x) = 2x + 3$  не залежить від часу. Отже, мішана задача (8.22)–(8.24) є задачею зі стаціонарними неоднорідностями. Шукаємо розв'язок  $u(x,t)$  у вигляді

$$u(x,t) = W(x,t) + \omega(x), \quad (8.25)$$

де  $\omega(x)$  є розв'язком крайової задачі

$$a^2 \omega''(x) + 2x + 3 = 0, \quad 0 < x < l, \quad (8.26)$$

$$\omega'(0) = 0, \quad \omega(l) = 0, \quad (8.27)$$

а для визначення  $W(x,t)$  одержуємо мішану задачу

$$W_{tt} = a^2 W_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (8.22a)$$

$$W(x, 0) = -\omega(x), \quad W_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (8.23a)$$

$$W_x(0, t) = 0, \quad W(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (8.25a)$$

Знаходимо розв'язок крайової задачі (8.26),(8.27). Маємо:

$$\omega(x) = -\frac{x^2}{6a^2}(2x + 9) + C_1x + C_2.$$

Підставивши знайдений загальний розв'язок рівняння (8.26) в крайові умови (8.27) і визначивши сталі  $C_1$  і  $C_2$ , одержимо

$$\omega(x) = -\frac{x^2}{6a^2}(2x + 9) + \frac{l^2}{6a^2}(2l + 9). \quad (8.28)$$

Розв'язок мішаної задачі (8.22a)–(8.24a) шукаємо за допомогою методу Фур'є:

$$u(x, t) = Y(t) \cdot X(x) \neq 0. \quad (8.29)$$

Підставивши (8.29) у рівняння (8.22a) та крайові умови (8.24a) і відокремивши змінні, одержимо:

$$Y''(t) + a^2 \lambda Y(t) = 0, \quad \lambda = \text{const}; \quad (8.30)$$

$$\left. \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ X'(0) &= 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

Дослідивши задачу Штурма-Ліувілля (8.31), дістанемо власні значення та власні функції у вигляді

$$\lambda_n = \left[ \frac{2n-1}{2l} \pi \right]^2, \quad X_n(x) = C \cos \frac{2n-1}{2l} \pi x, \quad C = \text{const}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.32)$$

Підклавши знайдені власні значення у рівняння (8.30) і зінтегрувавши його, дістанемо

$$Y_n(t) = A \cos \frac{2n-1}{2l} \pi a t + B \sin \frac{2n-1}{2l} \pi a t, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8.33)$$

де  $A, B$  – довільні сталі. Підставляємо (8.32) та (8.33) в (8.29) і додаємо, тоді

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{2n-1}{2l} \pi a t + B_n \sin \frac{2n-1}{2l} \pi a t \right) \cos \frac{2n-1}{2l} \pi x, \quad (8.34)$$

де  $A_n = AC, \quad B_n = BC.$

Коефіцієнти  $A_n$  і  $B_n$  визначаємо з початкових умов (8.23а):

$$W(x, 0) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2n-1}{2l} \pi x = \frac{x^2}{6a^2} (2x+9) - \frac{l^2}{6a^2} (2l+9),$$

$$W_t(x, 0) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2l} \pi a B_n \cos \frac{2n-1}{2l} \pi x = 0,$$

звідки  $B_n = 0$ , а

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left[ \frac{\xi^2}{6a^2} (2\xi+9) - \frac{l^2}{6a^2} (2l+9) \right] \cos \frac{2n-1}{2l} \pi \xi d\xi = \frac{16l^2 [4l + (-1)^n (3+2l)(2n-1)\pi]}{[(2n-1)\pi]^4 a^2}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в (8.34), а потім (8.34) і (8.28) – у формулу (8.25), одержуємо розв’язок поставленої мішаної задачі (8.22)–(8.24):

$$u(x, t) = \frac{l^2}{6a^2} (2l+9) - \frac{x^2}{6a^2} (2x+9) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16l^2 [4l + (-1)^n (3+2l)(2n-1)\pi]}{[(2n-1)\pi]^4 a^2} \cos \frac{2n-1}{2l} \pi a t \cos \frac{2n-1}{2l} \pi x.$$

### ***Завдання для самоконтролю***

1. Запишіть крайові умови для рівняння коливань струни, якщо
  - а) кінці струни нерухомо закріплені;
  - б) кінці струни вільні;
  - в) лівий кінець струни рухається за законом  $\omega(t)$ , а на правий діє сила  $v(t)$ ;
  - г) кінці струни пружно закріплені.
2. В чому полягає основна ідея методу відокремлення змінних?
3. При яких умовах ряд, складений із частинних розв’язків лінійного однорідного диференціального рівняння, також буде розв’язком цього рівняння?
4. В чому полягає задача Штурма-Ліувілля?
5. Чому власні значення задачі Штурма-Ліувілля у випадку вільних коливань струни є дійсними числами?
6. Які умови повинні справджувати початкові відхилення та швидкість у випадку вільних коливань скінченної струни, щоб ряд, який одержується

внаслідок застосування методу Фур'є до відповідної мішаної задачі, був її розв'язком?

7. Дайте фізичну інтерпретацію функцій

$$u_n(t, x) = \left( A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

8. Як будується розв'язок мішаної задачі у випадку вимушених коливань скінченної струни?

9. Яка мішана задача називається задачею зі стаціонарними неоднорідностями?

10. Наведіть метод побудови розв'язку мішаної задачі зі стаціонарними неоднорідностями.

### ***Індивідуальні завдання***

Виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанту (в завданні 1 число  $a$  відповідає номеру варіанта,  $A$  – дата виконання завдання; в завданні 3 параметр  $l$  взяти непарним числом). Для однієї із задач зобразити розв'язок в вибрані моменти часу.

**Завдання 1.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + A x e^{-t}$ ,

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = x; \quad u_t(x, 0) = 0.$$

**Завдання 2.**  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $t > 0$ ,

$$u(0, t) = e^{-t}, \quad u(\pi, t) = t, \quad u(x, 0) = \sin x \cos x, \quad u_t(x, 0) = 1.$$

**Завдання 3.**  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,

$$u(0, t) = t + 1, \quad u(l, t) = t^3 + 2, \quad u(x, 0) = x + 1, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

**Завдання 4.** Сформулювати задачу із стаціонарними неоднорідностями, розв'язати її та пояснити фізичний зміст.

## Тема 9. Вільні коливання прямокутної мембрани

### 9.1. Метод відокремлення змінних вільних коливань прямокутної мембрани

Для визначення відхилення мембрани від положення рівноваги, тобто функції  $u(x, y, t)$ , необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c, \quad (9.1)$$

який задовольняє початкові

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c \quad (9.2)$$

і крайові умови

$$u(0, y, t) = u(b, y, t) = 0, \quad (9.3)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, c, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (9.4)$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (9.1)–(9.4) розв'яжемо спочатку допоміжну задачу: знайти нетривіальні розв'язки рівняння (9.1), які б задовольняли крайові умови (9.3), (9.4).

Будемо шукати ці розв'язки у вигляді

$$u(x, y, t) = T(t)V(x, y) \neq 0. \quad (9.5)$$

Підставляючи (9.5) у рівняння (9.1) та крайові умови (9.3), (9.4) і відокремлюючи змінні, одержуємо

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (9.6)$$

$$\begin{cases} V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \\ V(0, y) = V(b, y) = 0, \\ V(x, 0) = V(x, c) = 0, \quad \lambda = \text{const}. \end{cases} \quad (9.7)$$

*Зауваження.* Рівняння  $V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0$  називається **рівнянням Гельмгольца**.

Одержану задачу на власні значення (9.7) для диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку також розв'язуємо методом відокремлення змінних. Візьмемо

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0 \quad (9.8)$$



Відокремлюючи змінні у задачі (9.7), одержуємо

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, \\ X(0) = X(b) = 0, \end{cases} \quad (9.9)$$

$$\begin{cases} Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(c) = 0. \end{cases} \quad (9.10)$$

Повторюючи міркування, наведені при дослідженні задачі Штурма-Ліувілля для рівняння коливань струни, матимемо

$$\mu = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \quad X_n(x) = C_1 \sin \frac{\pi n}{b} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lambda - \mu = \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2, \quad Y_m(y) = C_2 \sin \frac{\pi m}{c} y, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Таким чином, згідно з (9.8), власним значенням задачі (9.7)

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2$$

відповідатимуть власні функції

$$V_{n,m}(x, y) = A_{n,m} \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{c} y, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $A_{n,m} = C_1 C_2$  – деякий сталий множник. Виберемо його таким чином, щоб норма власної функції  $V_{n,m}(x, y)$  була рівна одиниці, тобто

$$\int_0^b \int_0^c V_{n,m}^2 dy dx = A_{n,m}^2 \int_0^b \int_0^c \sin^2 \frac{\pi n}{b} x \sin^2 \frac{\pi m}{c} y dy dx = 1.$$

З останньої рівності знаходимо  $A_{n,m} = 2(bc)^{-1/2}$ .

Ортогональність функцій  $\{V_{n,m}(x, y)\}$  в розглядуваному прямокутнику очевидна і не вимагає доведення.

Таким чином, система функцій

$$V_{n,m}(x, y) = 2(bc)^{-1/2} \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{c} y \quad (9.11)$$

є ортонормованою системою власних функцій прямокутної мембрани.

Відзначимо, що серед знайдених власних значень  $\lambda_{n,m}$  можуть бути і кратні, тобто такі власні значення, яким відповідає не одна, а декілька лінійно незалежних власних функцій. Кількість лінійно незалежних власних функцій, які відповідають власному значенню  $\lambda_{n,m}$ , залежить від кількості цілочислових розв'язків  $n$  і  $m$  рівняння

$$\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 = \lambda_{n,m}.$$

Наприклад, якщо  $b=c=1$ , то власному значенню  $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 5\pi^2$  будуть відповідати дві лінійно незалежні функції

$$V_{1,2}(x, y) = 2 \sin \pi x \sin 2\pi y, \quad V_{2,1}(x, y) = 2 \sin 2\pi x \sin \pi y,$$

тобто  $\lambda_{1,2}$  є двократним власним значенням.

Система (9.11) містить всі власні функції задачі (9.7). Для цього доведемо наступне.

**Твердження.** *Власні функції  $V_k(x, y)$  і  $V_s(x, y)$ , які відповідають різним власним значенням  $\lambda_k$ ,  $\lambda_s$  задачі (9.7), є ортогональними.*

Припустимо тепер, що задача (9.7) має власну функцію  $V_s(x, y)$ , яка не належить системі (9.11). Згідно з наведеним твердженням вона є ортогональною до всіх функцій (9.11). Із теорії кратних рядів Фур'є відомо: якщо функція  $V_s(x, y) \in C^2(0 < x < b, 0 < y < c)$  і задовольняє крайові умови задачі (9.7), то вона може бути розкладена в абсолютно і рівномірно збіжний ряд за системою власних функцій (9.11). В силу ортогональності  $V_s(x, y)$  і  $V_{n,m}(x, y)$  в розкладі функції  $V_s(x, y)$  за системою (9.11) залишиться лише скінченне число членів, які відповідають власному значенню  $\lambda_{n,m} = \lambda_s$ . Тому  $V_s(x, y)$  є лінійною комбінацією тільки тих функцій (9.11), які відповідають власному значенню  $\lambda_{n,m} = \lambda_s$ . Таким чином, всі власні функції прямокутної мембрани даються формулою (9.11).

Підставивши знайдені власні значення  $\lambda_{n,m}$  у рівняння (9.6) та зінтегрувавши його, одержимо

$$T_{n,m}(t) = B_{n,m} \cos a \sqrt{\lambda_{n,m}} t + C_{n,m} \sin a \sqrt{\lambda_{n,m}} t,$$

де  $B_{n,m}, C_{n,m}$  – довільні сталі. Підставляючи (9.11) і  $T_{n,m}(t)$  у рівняння (9.5), маємо

$$u_{n,m}(x, y, t) = (B_{n,m} \cos a \sqrt{\lambda_{n,m}} t + C_{n,m} \sin a \sqrt{\lambda_{n,m}} t) V_{n,m}(x, y). \quad (9.12)$$

Ми одержали нескінченну множину частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння (9.1), які задовольняють крайові умови (9.3), (9.4).

Ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(x, y, t) \quad (9.13)$$

також буде розв'язком рівняння (9.1) і задовольнятиме крайові умови (9.3), (9.4), якщо він збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати два рази за змінними  $x, y, t$  в розглядуваній області

$$D = \{(x, y, t) | t > 0, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c\}.$$

Визначаємо коефіцієнти  $B_{n,m}$  і  $C_{n,m}$  таким чином, щоб ряд (9.13) задовольняв і початкові умови (9.2). Для цього підставляємо (9.13) у (9.2):

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} V_{n,m}(x, y), \quad \psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a \sqrt{\lambda_{n,m}} C_{n,m} V_{n,m}(x, y). \quad (9.14)$$

Припустимо, що ряди (9.14) збігаються рівномірно в прямокутнику  $0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq c$ . Тоді, помноживши їх на функцію  $V_{k,s}(x, y)$  та зінтегрувавши одержаний результат по прямокутнику, матимемо

$$B_{n,m} = \int_0^b \int_0^c \varphi(x, y) V_{n,m}(x, y) dy dx, \quad C_{n,m} = \frac{1}{a \sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_0^b \int_0^c \psi(x, y) V_{n,m}(x, y) dy dx.$$

Підставляючи знайдені значення  $B_{n,m}$  і  $C_{n,m}$  у ряд (9.13), одержуємо розв'язок мішаної задачі (9.1)–(9.4).

**Теорема.** Якщо функції  $\varphi(x, y)$  та  $\psi(x, y)$  неперервні разом з похідними до 4-го порядку включно в прямокутнику  $[0, b] \times [0, c]$ , то ряд (9.13) збігається рівномірно в області  $D$  і його можна почленно диференціювати два рази за  $t$ ,  $x$  і  $y$ .

## 9.2. Застосування методу відокремлення змінних

**Приклад.** Розв'язати першу мішану задачу для рівняння коливань в прямокутнику

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 100 \Delta u, \\ u(t=0) &= xy(4-x)(5-y), \quad u_t(t=0) = 0, \\ u(x=0) &= u(y=0) = u(x=4) = u(y=5) = 0. \end{aligned}$$

*Розв'язування.* Мішана задача для хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$$

в прямокутнику  $[0, b] \times [0, c]$  за умов

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c \\ u(0, y, t) &= u(b, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = u(x, c, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

має розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_{n,m} \cos \pi a \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2}} t + B_{n,m} \sin \pi a \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2}} t \right) \times \\ &\times \sin \frac{\pi n}{b} x \cdot \sin \frac{\pi m}{c} y, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{2}{b} \cdot \frac{2}{c} \int_0^b \int_0^c \varphi(x, y) \sin \frac{\pi n}{b} x \cdot \sin \frac{\pi m}{c} y dx dy, \\ B_{n,m} &= \frac{4}{\pi a \sqrt{n^2 c^2 + b^2 m^2}} \int_0^b \int_0^c \psi(x, y) \sin \frac{\pi n}{b} x \cdot \sin \frac{\pi m}{c} y dx dy, \quad \{n, m\} \subset \mathbb{N}. \end{aligned}$$

За умовою задачі в прямокутнику  $[0, 4] \times [0, 5]$  початкова швидкість  $\psi(x, y) = 0$ , тому  $B_{n,m} = 0$ . Тоді для обчислення  $A_{n,m}$  запишемо формулу

$$A_{n,m} = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} \int_0^4 \int_0^5 xy(4-x)(5-y) \sin \frac{\pi n}{4} x \cdot \sin \frac{\pi m}{5} y dx dy,$$

причому із вигляду  $\varphi(x, y) = xy(4-x)(5-y)$ , яка є добутком функцій від змінної  $x$  та  $y$ , зручно подвійний інтеграл розглянути як добуток двох визначених інтегралів за кожною із змінних, тобто

$$A_{n,m} = \frac{1}{5} I_1 \cdot I_2,$$

$$I_1 = \int_0^4 (4x - x^2) \sin \frac{\pi n}{4} x dx, \quad I_2 = \int_0^5 (5y - y^2) \sin \frac{\pi m}{5} y dy.$$

Інтеграли обчислюємо інтегруванням частинами:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^4 (4x - x^2) \sin \frac{\pi n}{4} x dx = \left| \begin{array}{l} u = 4x - x^2, \quad du = (4 - 2x) dx, \\ dv = \sin \frac{\pi n}{4} x dx, \quad v = -\frac{4}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{4} x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{4(4x - x^2)}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{4} x \Big|_0^4 + \frac{4}{\pi n} \int_0^4 (4 - 2x) \cos \frac{\pi n}{4} x dx = \\ &= \frac{8}{\pi n} \int_0^4 (2 - x) \cos \frac{\pi n}{4} x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2 - x, \quad du = -dx, \\ dv = \cos \frac{\pi n}{4} x dx, \quad v = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{4} x \end{array} \right| = \\ &= \frac{8}{\pi n} \left( \frac{4(2 - x)}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{4} x \Big|_0^4 + \frac{4}{\pi n} \int_0^4 \sin \frac{\pi n}{4} x dx \right) = \frac{32}{(\pi n)^2} \left( -\frac{4}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{4} x \right) \Big|_0^4 = \\ &= -\frac{128}{(\pi n)^3} (\cos \pi n - \cos 0) = -\frac{128}{(\pi n)^3} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Аналогічно для другого інтеграла, інтегруючи двічі частинами, отримуємо

$$I_2 = \int_0^5 (5y - y^2) \sin \frac{\pi m}{5} y dy = -\frac{250}{(\pi m)^3} ((-1)^m - 1).$$

Тоді

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{1}{5} I_1 \cdot I_2 = \left( -\frac{128}{(\pi n)^3} ((-1)^n - 1) \right) \cdot \left( -\frac{250}{(\pi m)^3} ((-1)^m - 1) \right) = \\ &= \frac{50 \cdot 128}{\pi^6 n^3 m^3} ((-1)^n - 1) \cdot ((-1)^m - 1). \end{aligned}$$

При парних значеннях  $n, m$  маємо  $A_{n,m} = 0$ , а при непарних

$$A_{2n-1, 2m-1} = \frac{35600}{\pi^6 (2n-1)^3 (2m-1)^3}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{35600}{\pi^6 (2n-1)^3 \cdot (2m-1)^3} \cos \left( 10\pi \sqrt{\frac{(2n-1)^2}{16} + \frac{(2m-1)^2}{25}} t \right) \right) \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi(2n-1)}{4} x \cdot \sin \frac{\pi(2m-1)}{5} y. \end{aligned}$$

### ***Завдання для самоконтролю***

1. Записати задачу Штурма-Ліувілля для першої мішаної крайової задачі для однорідного хвильового рівняння в прямокутнику (вільні коливання прямокутної мембрани).
2. Показати ортонормованість системи власних функцій прямокутної мембрани.
3. Подвійний ряд Фур'є, його абсолютна та рівномірна збіжність.
4. Розглянути метод Фур'є для неоднорідного хвильового рівняння в прямокутнику.

### Індивідуальні завдання

Виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанту. В завданні 2 обрати дві задачі, самостійно провести всі обчислення та, по-можливості, із використанням відомого програмного забезпечення, зобразити розв'язок в вибрані моменти часу (будувати розв'язок, задавши відповідний ряд сумою кількох його початкових елементів, записувати функції у відповідності до вибраного програмного забезпечення).

**Завдання 1.** Розв'язати першу мішану задачу для рівняння коливань в прямокутнику.

1.  $u_{tt} = 9\Delta u, u(t = 0) = xy(2 - x)(5 - y), u_t(t = 0) = 0,$   
 $u(x = 0) = u(y = 0) = u(x = 2) = u(y = 5) = 0.$
2.  $u_{tt} = 16\Delta u, u(t = 0) = xy(3 - x)(6 - y), u_t(t = 0) = 0,$   
 $u(x = 0) = u(y = 0) = u(x = 3) = u(y = 6) = 0.$
3.  $u_{tt} = 25\Delta u, u(t = 0) = xy(4 - x)(2 - y), u_t(t = 0) = 0,$   
 $u(x = 0) = u(y = 0) = u(x = 4) = u(y = 2) = 0.$
4.  $u_{tt} = \Delta u, u(t = 0) = xy(5 - x)(3 - y), u_t(t = 0) = 0,$   
 $u(x = 0) = u(y = 0) = u(x = 5) = u(y = 3) = 0.$
5.  $u_{tt} = 49\Delta u, u(t = 0) = xy(7 - x)(2 - y), u_t(t = 0) = 0,$   
 $u(x = 0) = u(y = 0) = u(x = 7) = u(y = 2) = 0.$
6.  $u_{tt} = 64\Delta u, u(t = 0) = xy(6 - x)(3 - y), u_t(t = 0) = 0,$   
 $u(x = 0) = u(y = 0) = u(x = 4) = u(y = 3) = 0.$
7.  $u_{tt} = 81\Delta u, u(t = 0) = xy(5 - x)(4 - y), u_t(t = 0) = 0,$   
 $u(x = 0) = u(y = 0) = u(x = 5) = u(y = 4) = 0.$
8.  $u_{tt} = 16\Delta u, u(t = 0) = xy(6 - x)(6 - y), u_t(t = 0) = 0,$   
 $u(x = 0) = u(y = 0) = u(x = 6) = u(y = 6) = 0.$
9.  $u_{tt} = 121\Delta u, u(t = 0) = xy(3 - x)(6 - y), u_t(t = 0) = 0,$   
 $u(x = 0) = u(y = 0) = u(x = 3) = u(y = 6) = 0.$
10.  $u_{tt} = 144\Delta u, u(t = 0) = xy(2 - x)(7 - y), u_t(t = 0) = 0,$   
 $u(x = 0) = u(y = 0) = u(x = 2) = u(y = 7) = 0.$

## Завдання 2.

1. Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0; 0,5]$ ,  $y \in [0; 1]$  із закріпленим краєм, якщо в початковий момент часу відхилення точок мембрани задавалося функцією  $\sin 6\pi x \sin 6\pi y$ , а їх швидкість була рівна  $y(y-1)\operatorname{sh} x \operatorname{sh}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ .

2. Вивчити вільні коливання однорідної квадратної мембрани зі стороною  $b = 4$ , край  $y = 4$  якої закріплений пружно, а інші три краї – нерухомо, якщо початкові відхилення точок мембрани відсутні, а їх початкова швидкість рівна  $v_0 y(y-4)^2 \sin \pi x$ , де  $v_0 = \text{const}$ .

3. Дослідити коливання однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0; b]$ ,  $y \in [0; c]$ , якщо початкове відхилення її точок задане функцією  $8y(y-c)\sin \frac{\pi}{b}x$ , а їх початкова швидкість рівна  $xy$ . На краях  $x = b$  та  $y = c$  відхилення задається функціями відповідно  $bty$  та  $ctx$ , а інші два краї нерухомо закріплені.

4. Дослідити коливання однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0; b]$ ,  $y \in [0; c]$  з вільними краями під дією рівномірно розподіленої по мембрані поперечної сили  $f(x, y, t) = \rho \left(1 + \cos \frac{\pi}{c}y\right)$ , де  $\rho$  – густина, якщо початкове відхилення точок мембрани задане функцією  $\cos \frac{\pi}{b}x$ , а їх початкова швидкість рівна нулеві.

5. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0; s]$ ,  $y \in [0; p]$ , краї  $x = 0$  і  $y = p$  якої нерухомо закріплені, а інші вільні, якщо коливання викликані неперервно розподіленою по мембрані поперечною силою густини

$$f(x, y, t) = e^{-t} x(x-s)^2 \cos \frac{\pi}{2p} y.$$

6. Однорідна квадратна мембрана зі стороною  $b = 2$  з нерухомо закріпленим краєм піддається дії рівномірно розподіленої по її поверхні



поперечної сили  $f(x, y, t) = e^{-t} y(y-2)(2-x) \operatorname{sh} x$ . В початковий момент часу відхилення і швидкість точок мембрани були відсутні. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок мембрани в довільний момент часу  $t$ .

**7.** Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0; b]$ ,  $y \in [0; c]$ , два краї  $x=0$  і  $y=0$  якої нерухомо закріплені, а інші два вільні, якщо в початковий момент часу точки мембрани знаходилися у спокої, а їх швидкість була рівна  $u_t(x, y, 0) = y(y-c)^2 \sin \frac{3\pi}{2b} x$ .

**8.** Однорідна квадратна мембрана зі стороною  $b$ , край  $y=b$  якої вільний, а три інші краї нерухомо закріплені, коливається внаслідок дії рівномірно розподіленої по всій її поверхні поперечної сили густини

$$f(x, y, t) = t^2 x(x-b) \sin \frac{5\pi}{2b} y.$$

Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок мембрани в довільний момент часу  $t$ .

**9.** Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0; 2]$ ,  $y \in [0; 1]$ , два краї  $y=0$  і  $y=1$  якої вільні, а інші два – нерухомо закріплені, якщо в початковий момент часу мембрана мала форму  $u(x, y, 0) = A \cos \pi y \sin \frac{\pi}{2} x$ ,  $A = \text{const}$  і почала коливатися без початкової швидкості. Реакцією навколишнього середовища нехтувати.

**10.** Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної квадратної мембрани зі стороною  $b$ , якщо коливання викликані тільки внаслідок дії неперервно розподіленої по мембрані поперечної сили густини  $f(x, y, t) = e^{-t} \cos \frac{2\pi}{b} y \sin \frac{\pi}{b} x$ . Краї  $x=0$  і  $x=b$  нерухомо закріплені, а інші – вільні.

**11.** Дослідити коливання однорідної квадратної мембрани з нерухомо закріпленим краєм, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок рівномірно розподіленої по поверхні мембрани поперечної сили густини

$$f(x, y, t) = 3ty(y - b) \sin \frac{6\pi}{b} x,$$

де  $b$  – довжина сторони мембрани.

**12.** Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0; b]$ ,  $y \in [0; c]$ , два краї  $x = 0$  і  $y = 0$  якої вільні, а інші два – нерухомо закріплені, якщо коливання викликані тільки за рахунок неперервно розподіленої по мембрані поперечної сили густини  $f(x, y, t) = e^{-t} (x^2 - b^2) \cos \frac{\pi}{2c} y$ .

**13.** Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0; 2]$ ,  $y \in [0; 1]$ , два краї якої  $x = 0$  і  $x = 2$  вільні, а інші два – нерухомо закріплені, якщо коливання мембрани здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення її точок  $u(x, y, 0) = \cos \frac{\pi}{2} x \sin \pi y$ .

**14.** Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0; 1]$ ,  $y \in [0; 2]$ , краї  $x = 0$  і  $y = 0$  якої вільні, а інші – нерухомо закріплені, якщо коливання відбуваються тільки внаслідок початкового відхилення її точок, яке рівне  $u(x, y, 0) = x^2 y^2 (1 - x)(2 - y)$ .

**15.** Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0; 1]$ ,  $y \in [0; \pi]$ , краї  $x = 0$  і  $x = 1$  якої вільні, а інші – нерухомо закріплені, під дією неперервно розподіленої по мембрані зовнішньої сили інтенсивності  $P_0 = \text{const}$ , якщо початкові відхилення точок мембрани відсутні, а їх початкова швидкість рівна  $y^2 - \pi y$ .

## Тема 10. Одновимірне рівняння теплопровідності. Метод Фур'є

### 10.1. Постановка задач для рівняння теплопровідності

Розглянемо початкову та крайові умови для рівняння теплопровідності та відповідні цим умовам задачі.

В тривимірному просторі  $(x, y, z)$  розглянемо однорідне тіло  $V$  з початковою температурою  $\varphi(x, y, z)$ , в якому є внутрішні джерела тепла інтенсивності  $F(x, y, z, t)$ .

Нехай потрібно визначити температуру  $u(x, y, z, t)$  тіла  $V$  в будь-який момент часу  $t > 0$ , якщо на його досить гладкій поверхні  $S$ :

- 1) задана температура  $\psi(x, y, z, t)$ ;
- 2) заданий тепловий потік  $\omega(x, y, z, t)$ ;
- 3) проходить теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого дорівнює  $\mu(x, y, z, t)$ .

Для розв'язання поставленої фізичної задачі складемо відповідну їй **математичну модель**. Шукана температура  $u(x, y, z, t)$  при  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in V$  повинна бути розв'язком диференціального рівняння

$$u_t(x, y, z, t) = a^2 \Delta u(x, y, z, t) + f(x, y, z, t). \quad (10.1)$$

Згідно з умовою задачі в початковий момент часу

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V \cup S = \bar{V}. \quad (10.2)$$

Із умов на поверхні  $S$  тіла  $V$  маємо:

$$1) \quad u|_{(x, y, z) \in S} = \psi(t, x, y, z), \quad t \geq 0, (x, y, z) \in S; \quad (10.3)$$

2) на підставі закону Фур'є

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{(x, y, z) \in S} = -K^{-1} \omega(x, y, z, t), t \geq 0, (x, y, z) \in S, \quad (10.4)$$

де  $K$  – коефіцієнт теплопровідності;  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до  $S$ ;

3) згідно з законом Ньютона

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{(x, y, z) \in S} = -\lambda [u(x, y, z, t) - \mu(x, y, z, t)]|_{(x, y, z) \in S}, \quad (10.5)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплообміну.

Таким чином, в залежності від теплового режиму на поверхні тіла  $V$  приходимо до однієї із задач:

1) знайти розв’язок диференціального рівняння (10.1), який задовольняє початкову (10.2) і крайову (10.3) умови;

2) знайти розв’язок диференціального рівняння (10.1), який задовольняє початкову (10.2) і крайову (10.4) умови;

3) знайти розв’язок диференціального рівняння (10.1), який задовольняє початкову (10.2) і крайову (10.5) умови.

Задачі (10.1) – (10.5) називаються відповідно першою, другою і третьою основними мішаними задачами для рівнянь параболічного типу. Відзначимо, що при постановці всіх задач, як вважається, початкова і крайові умови не суперечливі, тобто вони задовольняють умову узгодженості. У випадку першої мішаної задачі умова узгодженості має вигляд

$$\varphi(x, y, z) \Big|_{(x, y, z) \in S} = \psi(x, y, z, t). \quad (10.6)$$

До сформульованих задач приходимо і при дослідженні процесів дифузії в об’ємі  $V$ , тільки в цьому випадку функція  $u(x, y, z, t)$  є концентрацією розчину або газу в точці  $(x, y, z) \in V$  в момент часу  $t$ .

Аналогічно ставляться мішані задачі і у випадку дво- і одно- вимірного середовищ. На практиці зустрічається значно ширше коло мішаних задач.

## **10.2. Інтегрування першої мішаної задачі для одновимірного рівняння теплопровідності**

Згідно з міркуваннями, наведеними вище, потрібно в області  $\Omega = (0, +\infty) \times (0, l)$  знайти розв’язок диференціального рівняння

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad (10.7)$$

який задовольняє початкову

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l] \quad (10.8)$$

і крайові умови

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (10.9)$$

Вважаємо, що функція  $\varphi(x)$  задовольняє умови узгодженості

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0. \quad (10.10)$$

Доведено, що мішана задача (10.7)–(10.10) в просторі функцій  $C(\overline{\Omega}) \cap C^{(1,2)}(\Omega)$  може мати тільки єдиний розв'язок і будемо шукати його у вигляді

$$u(x, t) = T(t)X(x) \neq 0. \quad (10.11)$$

Підставивши (10.11) у початкове рівняння (10.7) і крайові умови та відокремивши змінні, одержимо

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (10.12)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (10.13)$$

$$X(0) = 0, X(l) = 0, \quad (10.14)$$

де  $\lambda$  – довільна стала.

Задача Штурма-Ліувілля (10.13), (10.14) досліджувалась і в попередніх темах. Можна показати, що власними значеннями будуть  $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а відповідні власні функції матимуть вигляд

$$X_n(x) = c_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad c_n = \text{const}. \quad (10.15)$$

Підставивши власні значення у рівняння (10.12) та зінтегрувавши його, маємо

$$T_n(t) = b_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \quad b_n = \text{const}. \quad (10.16)$$

Підставляючи (10.15) і (10.16) у (10.11), знаходимо

$$u_n(x, t) = a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $a_n$  – довільні сталі. Таким чином, ми одержали нескінченну систему частинних розв'язків рівняння (10.7), які задовольняють крайовим умовам (10.9).

Ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (10.17)$$

також буде розв'язком рівняння (10.7), якщо він збігається, і його можна почленно диференціювати один раз за змінною  $t$  і два рази за  $x$ , причому цей ряд задовольняє і крайові умови (10.9).

Припустимо, що вказані умови виконуються. Тоді для знаходження єдиного розв'язку мішаної задачі (10.7)–(10.9) залишилось вибрати коефіцієнти  $a_n$  таким чином, щоб ряд (10.17) задовольняв і початкову умову, тобто щоб

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x). \quad (10.18)$$

Нехай функція  $\varphi(x) \in C^1([0, l])$ , де  $C^1([0, l])$  – клас неперервних функцій, які мають кусково-неперервну похідну при  $x \in [0, l]$  і задовольняють умови узгодженості (10.10). Тоді на відріжку  $[0, l]$  функція  $\varphi(x)$  розкладається в ряд Фур'є за системою власних функцій  $\sin \frac{\pi n}{l} x$ , і із рівності (10.18) маємо

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (10.19)$$

Підставивши знайдені коефіцієнти (10.19) в ряд (10.17) одержимо формальний розв'язок мішаної задачі (10.7)–(10.9).

Для обґрунтування одержаного результату можна довести [14] наступне твердження: якщо функція  $\varphi(x) \in C^1([0, l])$ , то ряд (10.17), де коефіцієнти  $a_n$  визначаються за формулою (10.19), в області  $\Omega$  можна почленно диференціювати довільну кількість разів як за змінною  $x$ , так і за  $t$ , причому він визначає неперервну функцію в  $\bar{\Omega}$ .

Що стосується загальної мішаної задачі для рівняння теплопровідності і задачі зі стаціонарними неоднорідностями, а також мішаних задач у двовимірному просторі, то підхід до їх інтегрування залишається той самий, що і у випадку відповідних мішаних задач для хвильового рівняння.

**Приклад 1.** Методом відокремлення змінних знайти розв'язок першої

мішаної задачі для рівняння теплопровідності на відрізку:

$$\begin{aligned}u_t &= 9u_{xx}, 0 < x < 8, t > 0, \\u(x, 0) &= \begin{cases} x^2/4, & 0 \leq x \leq 4, \\ 8 - x, & 4 < x \leq 8, \end{cases} \\u(0, t) &= u(8, t) = 0.\end{aligned}\tag{10.20}$$

*Розв'язування.* Відповідно до методу відокремлення змінних Фур'є шукаємо ненульові розв'язки у вигляді добутку функцій (формула (10.11)):

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

і  $u(x, t)$  підставляємо в рівняння

$$X(x)T'(t) = 9X''(x)T(t).$$

Відокремлюємо змінні

$$\frac{T'(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

і отримуємо звичайні диференціальні рівняння для знаходження функцій  $T(t)$  і  $X(x)$

$$T'(t) + 9\lambda T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Із крайових умов  $u(0, t) = u(8, t) = 0$  одержуємо

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(8)T(t) = 0,$$

тоді  $X(0) = 0, X(8) = 0$ .

Маємо задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, X(8) = 0,$$

яка має нетривіальні розв'язки лише за умови  $\lambda > 0$ .

Характеристичне рівняння

$$k^2 + \lambda = 0$$

має уявні корені  $k = \pm i\sqrt{\lambda}$ , тому загальний розв'язок рівняння

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

На підставі отриманих крайових умов для функції  $X(x)$ :

$X(0) = 0$ ;  $X(8) = 0$  маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} \cdot 8 + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \cdot 8 = 0, \end{cases}$$

з якої  $\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin \sqrt{\lambda} \cdot 8 = 0, \end{cases}$  і  $C_2 \neq 0$ , тому  $\sin \sqrt{\lambda} \cdot 8 = 0$ , а, отже,

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{8}\right)^2, k \in \mathbb{N}.$$

Лише за таких власних значень  $\lambda_k$  задача має нетривіальні розв'язки

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{8} x,$$

які є власними функціями цієї задачі. Кожному власному числу  $\lambda_k$  відповідає рівняння

$$T'(t) + 9 \left(\frac{k\pi}{8}\right)^2 T(t) = 0.$$

Після відокремлення змінних

$$\frac{dT}{T} = - \left(\frac{3k\pi}{8}\right)^2 dt$$

та інтегрування

$$\ln T = - \left(\frac{3k\pi}{8}\right)^2 t + \ln C$$

маємо розв'язки

$$T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{3k\pi}{8}\right)^2 t}, k \in \mathbb{N},$$

де  $C_k$  — довільні сталі.

Таким чином, функції

$$u_k(x, t) = X_k(x) \cdot T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{3k\pi}{8}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{k\pi}{8} x$$

задовольняють рівняння теплопровідності та крайові умови, вони складають нескінченну послідовність розв'язків поставленої задачі. Елементи цієї послідовності дають розв'язок крайової задачі у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{3k\pi}{8}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{k\pi}{8} x.$$



На завершення використовуємо початкову умову

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/4, & 0 \leq x \leq 4, \\ 8 - x, & 4 < x \leq 8, \end{cases}$$

для обчислення коефіцієнтів  $C_k$ :

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{3k\pi}{8}\right)^2 \cdot 0} \cdot \sin \frac{k\pi}{8} x = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi}{8} x.$$

Останній ряд є тригонометричним рядом Фур'є розвинення функції  $u(x, 0)$  за синусами кратних дуг на проміжку  $(0, 8)$ , тому коефіцієнти  $C_k$  можна обчислити за відомою формулою

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{8} \int_0^8 u(x, 0) \sin \frac{k\pi}{8} x dx = \frac{1}{4} \left( \int_0^4 \frac{x^2}{4} \sin \frac{k\pi}{8} x dx + \int_4^8 (8 - x) \sin \frac{k\pi}{8} x dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} (I_1 + I_2), \end{aligned}$$

де інтеграли

$$I_1 = \int_0^4 \frac{x^2}{4} \sin \frac{k\pi}{8} x dx, \quad I_2 = \int_4^8 (8 - x) \sin \frac{k\pi}{8} x dx$$

обчислюються інтегруванням частинами і

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{32}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{128}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} + \frac{256}{k^3\pi^3} \left( \cos \frac{k\pi}{2} - 1 \right), \\ I_2 &= \frac{32}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{64}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{4} (I_1 + I_2) = \frac{1}{4} \left( \frac{128 + 64}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} + \frac{256}{k^3\pi^3} \left( \cos \frac{k\pi}{2} - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{48}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} + \frac{64}{k^3\pi^3} \left( \cos \frac{k\pi}{2} - 1 \right), \end{aligned}$$

тоді розв'язок крайової задачі (30) має вигляд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{48}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} + \frac{64}{k^3\pi^3} \left( \cos \frac{k\pi}{2} - 1 \right) \right) e^{-\left(\frac{3k\pi}{8}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{k\pi}{8} x.$$

*Зауваження.* Якщо на кінцях стержня задано інші теплові режими, але крайові умови є однорідними, то при побудові розв'язку мішаних задач потрібно повторити вище приведені міркування і в кожному конкретному випадку [16], [17] дослідити відповідну задачу Штурма-Ліувілля.

**Приклад 2.** Зінтегрувати мішану задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1; \quad (10.21)$$

$$u(x, 0) = 1 + x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (10.22)$$

$$u_x(0, t) - u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (10.23)$$

*Фізична інтерпретація:* знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні одиничної довжини з теплоізовованою бічною поверхнею, якщо початкова температура точок стержня рівна  $\varphi(x) = 1 + x - 2x^2$ , на правому кінці підтримується нульова температура, а на лівому відбувається теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури.

*Розв'язування.* Рівняння та крайові умови однорідні (задача типу 1). Початкова та крайові умови узгоджені, отже, можемо застосувати метод відокремлення змінних. Розв'язок шукаємо у вигляді добутку:

$$u(x, t) = T(t) \cdot X(x) \neq 0. \quad (10.24)$$

Підставивши (10.24) у рівняння та крайові умови, одержимо:

$$T'(t) - a^2 \lambda T(t) = 0, \quad \lambda = \text{const}; \quad (10.25)$$

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0; \\ X'(0) - X(0) &= 0, \quad X(1) = 0. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (10.26).

1. Нехай  $\lambda > 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння з (10.26) запишеться у вигляді  $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ . Підставивши цей розв'язок у крайові умови, одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих  $C_1$  і  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1(\sqrt{\lambda} - 1) + C_2(-\sqrt{\lambda} - 1) = 0; \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи  $\Delta = 2(\sqrt{\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} + \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}) \neq 0$ , оскільки  $\sqrt{\lambda} > 0$ .  
Отже,  $C_1 = C_2 = 0$ , а тому  $X(x) \equiv 0$  і  $\lambda > 0$  не є власним значенням.

2. Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді  $X(x) = C_3 x + C_4$  і з крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} C_3 - C_4 = 0; \\ C_3 + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_3 = C_4 = 0$ , а тому  $X(x) \equiv 0$  і  $\lambda = 0$  також не є власним значенням.

3. При  $\lambda < 0$  загальний розв'язок рівняння з (10.26) запишеться у вигляді  $X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda} x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda} x$ . Із крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} C_6 \sqrt{-\lambda} - C_5 = 0; \\ C_6 \sin \sqrt{-\lambda} + C_5 \cos \sqrt{-\lambda} = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_5 = C_6 \sqrt{-\lambda}$  і  $C_6 (\sin \sqrt{-\lambda} + \sqrt{-\lambda} \cos \sqrt{-\lambda}) = 0$ . Отже, нетривіальний розв'язок задачі (10.26) існує тільки для тих значень параметру  $\lambda$ , які є розв'язками трансцендентного рівняння  $\sin \sqrt{-\lambda} + \sqrt{-\lambda} \cos \sqrt{-\lambda} = 0$  або

$$\operatorname{tg} \sqrt{-\lambda} = -\sqrt{-\lambda}. \quad (10.27)$$

Рівняння (10.27) має зчисленну множину коренів  $\lambda_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , причому всі корені є дійсними. Введемо позначення  $\sqrt{-\lambda_k} = \mu_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тоді відповідні власні функції матимуть вигляд (беремо для визначеності  $C_6 = 1$ )

$$X_k(x) = \mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x, \quad k \in \mathbb{N},$$

де  $\mu_k$  – додатні корені рівняння  $\operatorname{tg} \mu_k = -\mu_k$ .

Підставивши знайдені власні значення  $\lambda_k = -\mu_k^2$  у рівняння (10.25) та зінтегрувавши його, одержимо:

$$T_k(t) = A_k e^{-(a\mu_k)^2 t}, \quad k \in \mathbb{N},$$

де  $A_k$  – довільні сталі. Тоді, згідно (10.24), будь-який частинний розв'язок рівняння, який справджує крайові умови, запишеться у вигляді

$$u_k(x, t) = A_k e^{-(a\mu_k)^2 t} (\mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

В силу лінійності й однорідності рівняння сума частинних розв'язків

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(a\mu_k)^2 t} (\mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x) \quad (10.28)$$

також буде розв'язком рівняння початкового рівняння і справджуватиме крайові умови. Сталі  $A_k$  визначаємо підстановкою ряду (10.28) у початкову умову (10.22). Маємо:

$$u(x, 0) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x) = 1 + x - 2x^2.$$

Домножимо на  $X_k(x) = \mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x$  ліву і праву частини останньої рівності і зінтегруємо по змінній  $x$  на проміжку  $[0; 1]$ . Тоді, врахувавши властивість ортогональності власних функцій, які відповідають різним власним значенням, одержимо:

$$A_k = \frac{\int_0^1 (1 + x - 2x^2) (\mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x) dx}{\int_0^1 (\mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x)^2 dx} = \frac{8 \operatorname{tg} \frac{\mu_k}{2} \cos^2 \mu_k}{\mu_k^2 (1 + \cos^2 \mu_k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (10.28), одержимо розв'язок мішаної задачі (10.21)–(10.23).

### ***Завдання для самоконтролю***

1. Записати першу, другу і третю мішані задачі для рівнянь параболічного типу, пояснити відмінність між ними.
2. Запишіть рівняння теплопровідності, якщо
  - а) бічна поверхня стержня теплоізована, а всередині його діють джерела тепла інтенсивності  $F(x, t)$ ;
  - б) через бічну поверхню стержня проходить вільний теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого рівна  $\theta(x, t)$ .
3. Запишіть крайові умови, якщо
  - а) кінці стержня підтримуються при нульовій температурі;
  - б) кінці стержня теплоізовані;

в) на лівому кінці підтримується температура  $\theta(t)$ , а до правого підводиться тепловий потік  $\omega(t)$ ;

г) на кінцях стержня проходить теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого рівна нулеві.

4. Розв'язування першої мішаної задачі для одновимірного рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних.

5. Власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля.

6. Навести приклади використання рівнянь теплопровідності в поліграфічному обладнанні.

### *Індивідуальні завдання*

**Завдання 1.** Розв'язати першу мішану задачу для рівняння теплопровідності на відрізку (зобразити розв'язок в декілька моментів часу).

1.  $u_t = 9u_{xx}, 0 < x < 10, t > 0,$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/5, & 0 \leq x \leq 5, \\ 10 - x, & 5 < x \leq 10, \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(10, t) = 0.$$

2.  $u_t = 25u_{xx}, 0 < x < 9, t > 0,$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2/9, & 0 \leq x \leq 9/2, \\ 9 - x, & 9/2 < x \leq 9, \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(9, t) = 0.$$

3.  $u_t = 9u_{xx}, 0 < x < 3, t > 0,$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2/3, & 0 \leq x \leq 3/2, \\ 3 - x, & 3/2 < x \leq 3, \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(3, t) = 0.$$

4.  $u_t = u_{xx}, 0 < x < 5, t > 0,$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2/5, & 0 \leq x \leq 5/2, \\ 5 - x, & 5/2 < x \leq 5, \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(5, t) = 0.$$

$$5. u_t = 4u_{xx}, 0 < x < 7, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2/7, & 0 \leq x \leq 7/2, \\ 7 - x, & 7/2 < x \leq 7, \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(7, t) = 0.$$

$$6. u_t = 25u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 - x, & 1/2 < x \leq 1, \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

$$7. u_t = 9u_{xx}, 0 < x < 4, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & 2 < x \leq 4, \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(4, t) = 0.$$

$$8. u_t = 36u_{xx}, 0 < x < 3, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2/3, & 0 \leq x \leq 3/2, \\ 3 - x, & 3/2 < x \leq 3, \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(3, t) = 0.$$

$$9. u_t = 4u_{xx}, 0 < x < 6, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/3, & 0 \leq x \leq 3, \\ 6 - x, & 3 < x \leq 6, \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(6, t) = 0.$$

$$10. u_t = 16u_{xx}, 0 < x < 2, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0.$$

**Завдання 2.** Аналогічно прикладу 2 сформулювати мішану задачу та дати фізичну інтерпретацію (зі своїми даними).

## Тема 11. Мішані задачі для рівняння теплопровідності і задачі зі стаціонарними неоднорідностями

### 11.1. Інтегрування мішаних задач для рівнянь теплопровідності

Схема інтегрування мішаних задач для рівнянь параболічного типу є аналогічною схемі розв'язування мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу. Ще раз наведемо основні ідеї методу відокремлення змінних побудови розв'язків мішаних задач на прикладі першої мішаної задачі для рівняння поширення тепла в однорідному ізотропному стержні:

$$\begin{aligned}u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l; \\u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \\u(0, t) &= \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t < T.\end{aligned}$$

Будемо вважати, що початкова та крайові умови є узгодженими, тобто виконуються рівності  $\varphi(0) = \mu_1(0)$ ,  $\varphi(l) = \mu_2(0)$ .

Можна вирізнити чотири типи задач.

**1.** Задача для однорідного рівняння з однорідними крайовими умовами ( $f(x, t) \equiv 0$ ,  $\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 0$ ). Розв'язок шукається у вигляді добутку  $u(x, t) = T(t) \cdot X(x) \neq 0$ , де  $X(x)$  – власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувілля, а  $T(t)$  визначаються з однорідного рівняння та початкової умови.

**2.** Задача для неоднорідного рівняння з однорідними крайовими умовами ( $f(x, t) \neq 0$ ,  $\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 0$ ). Будемо вважати, що  $f(x, t)$  як функція змінної  $x$  справджує крайові умови. Тоді згідно методу Фур'є розв'язок шукається у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_n T_n(t) X_n(x),$$

де  $X_n(x)$  – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі, а  $T_n(t)$  визначаються підстановкою ряду для  $u(x, t)$  у неоднорідне рівняння та в початкову умову.

**3.** Загальна мішана задача:  $\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) \neq 0$ , тобто хоча б одна з крайових умов неоднорідна. Тоді для застосування методу відокремлення змінних



необхідно спочатку звести крайові умови до однорідних. Розв'язок шукаємо у вигляді суми  $u(x,t)=V(x,t)+\omega(x,t)$ , причому допоміжну функцію  $\omega(x,t)$  підбираємо таким чином, щоб вона справджувала крайові умови. Зокрема, у випадку поставленої вище задачі слід вимагати виконання умов  $\omega(0,t)=\mu_1(t)$ ,  $\omega(l,t)=\mu_2(t)$ . Тоді для нової невідомої функції  $V(x,t)$  одержимо мішану задачу типу 1 або типу 2, до якої за умови її коректної постановки можна застосувати метод Фур'є.

*Зауваження.* Допоміжну функцію  $\omega(x,t)$  зручно шукати в стандартному лінійному вигляді  $\omega(x,t)=a(t)x+b(t)$ , де коефіцієнти  $a(t)$  і  $b(t)$  визначаються з крайових умов. Зокрема, якщо обидві крайові умови першого роду, то одержимо:  $\omega(x,t)=\mu_1(t)+xl^{-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))$ . Винятком є друга мішана задача: якщо обидві крайові умови другого роду, тобто мають вигляд  $u_x(0,t)=\nu_1(t)$ ,  $u_x(l,t)=\nu_2(t)$ , то допоміжна функція як лінійна не визначається однозначно, зате її можна шукати у вигляді  $\omega(x,t)=(a(t)x+b(t))x$ . У цьому випадку будемо мати  $\omega(x,t)=x\nu_1(t)+0,5x^2l^{-1}(\nu_2(t)-\nu_1(t))$ . Проте такі прості прийоми не завжди є ефективними, адже слід пам'ятати, що до мішаної задачі з однорідними крайовими умовами, яку одержимо для  $V(x,t)$ , метод Фур'є застосовний лише тоді, коли вільний член у рівнянні справджує крайові умови (за винятком випадку задачі зі стаціонарними неоднорідностями, поданого нижче). Якщо цього домогтися не вдалося, то слід шукати інші способи побудови допоміжної функції.

**4.** Задача зі стаціонарними неоднорідностями: вільний член у рівнянні та крайові умови не залежать від часу, тобто  $f(x,t)\equiv f(x)$ ,  $\mu_1(t)\equiv\mu_1=const$ ,  $\mu_2(t)\equiv\mu_2=const$ . Цю задачу можна розв'язувати як загальну мішану задачу (вона є частинним випадком загальної задачі), проте в даному випадку це нерационально. Найзручніше шукати розв'язок у вигляді

$$u(x,t)=V(x,t)+\omega(x),$$

де допоміжна функція  $\omega(x)$  (стаціонарна температура) повинна справджувати не лише крайові умови, але і рівняння. Зокрема, для поставленої вище мішаної задачі  $\omega(x)$  повинна бути розв'язком наступної крайової задачі:

$$\begin{aligned} a^2 \omega''(x) + f(x) &= 0; \\ \omega(0) &= \mu_1, \quad \omega(l) = \mu_2. \end{aligned}$$

Тоді для функції  $V(x, t)$  одержимо мішану задачу типу 1 (однорідне рівняння та однорідні крайові умови), до якої безумовно застосовний метод Фур'є.

Винятком тут знову є друга мішана задача. Крайова задача

$$\begin{aligned} a^2 \omega''(x) + f(x) &= 0; \\ \omega'(0) &= \nu_1, \quad \omega'(l) = \nu_2 \end{aligned}$$

має розв'язок, якщо виконується умова  $\int_0^l f(\xi) d\xi = a^2(\nu_1 - \nu_2)$ . Якщо ж ця умова не виконується, то задану другу мішану задачу слід інтегрувати як задачу типу 2 при  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ , або як загальну мішану задачу у випадку неоднорідних крайових умов.

### ***Приклади інтегрування деяких мішаних задач***

**Приклад 1.** Знайти закон зміни температури всередині однорідного ізотропного стержня довжини  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо в лівому кінці стержня температура змінюється згідно закону  $U_0 \sin \omega t$ , де  $U_0, \omega$  задані сталі, а в правому підтримується нульова температура. Всередині стержня є джерела та поглиначі тепла: їх інтенсивність (в розрахунку на одиницю маси стержня) рівна  $U_0 \omega(l-x)l^{-1} \cos \omega t$ . Початкова температура точок стержня задана функцією  $U_0 l^{-2} x(l-x)$ .

*Розв'язування.* Математична модель задачі:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + U_0 \omega(l-x)l^{-1} \cos \omega t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l; \\ u(x, 0) &= U_0 l^{-2} x(l-x), \quad 0 \leq x \leq l; \\ u(0, t) &= U_0 \sin \omega t, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned}$$

Крайові умови неоднорідні (задача типу 3), тому для застосування методу Фур'є спершу слід звести вихідну задачу до задачі з однорідними крайовими умовами. Покладемо  $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$ , де  $V(x,t)$  – нова невідома функція, а  $W(x,t)$  – допоміжна функція, котра справджує неоднорідні крайові умови. Згідно викладеного вище

$$W(x,t) = \mu_1(t) + xl^{-1}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = (1 - xl^{-1})U_0 \sin \omega t.$$

Тоді для знаходження функції  $V(x,t)$  одержимо мішану задачу

$$V_t = a^2 V_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$$

$$V(x,0) = U_0 l^{-2} x(l-x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$V(0,t) = 0, \quad V(l,t) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Початкова та крайові умови є узгодженими, отже, до одержаної задачі застосовний метод Фур'є. Шукаючи розв'язок аналогічно, як у попередній темі, знаходимо

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l U_0 x l^{-2} (l-x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ 8U_0 (\pi n)^{-3}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Отже,

$$u(x,t) = U_0 (1 - xl^{-1}) \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8U_0}{\pi^3 (2k-1)^3} e^{-\left[\frac{(2k-1)a\pi}{l}\right]^2 t} \sin \frac{(2k-1)\pi}{l} x.$$

**Приклад 2.** Знайти закон зміни температури в однорідному ( $a=1$ ) ізотропному стержні довжини  $l$ , лівий кінець якого теплоізований, а до правого підводиться сталий тепловий потік  $v_0 = \text{const}$ , якщо початкова температура точок стержня задана функцією  $\varphi(x) = 0,5v_0 l^{-1} x^2$ , а через бічну поверхню стержня проходить теплообмін (із коефіцієнтом  $b=1$ ) з навколишнім середовищем нульової температури.

Розв'язування.  $v_0 = \text{const}$ , отже, маємо задачу типу 4 (задача зі стаціонарними неоднорідностями):

$$u_t = u_{xx} - u, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$$

$$u(x, 0) = 0,5v_0 l^{-1} x^2, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = v_0, \quad 0 \leq t < T.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді  $u(x, t) = V(x, t) + \omega(x)$ , де стаціонарна температура  $\omega(x)$  визначається з крайової задачі

$$\omega''(x) - \omega(x) = 0;$$

$$\omega'(0) = 0, \quad \omega'(l) = v_0.$$

Зінтегрувавши крайову задачу, одержимо  $\omega(x) = v_0 \text{sh}^{-1} l \text{ch} x$ . Тоді після заміни  $u(x, t) = V(x, t) + v_0 \text{sh}^{-1} l \cdot \text{ch} x$  для нової невідомої функції  $V(x, t)$  одержимо мішану задачу

$$V_t = V_{xx} - V, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$$

$$V(x, 0) = 0,5v_0 l^{-1} x^2 - v_0 \text{sh}^{-1} l \text{ch} x, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$V_x(0, t) = 0, \quad V_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Оскільки крайові умови однорідні, то для спрощення рівняння зручно ввести підстановку  $V(x, t) = e^{-t} \cdot W(x, t)$ . Тоді для  $W(x, t)$  матимемо задачу

$$W_t = W_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$$

$$W(x, 0) = 0,5v_0 l^{-1} x^2 - v_0 \text{sh}^{-1} l \text{ch} x, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$W_x(0, t) = 0, \quad W_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Розв'язок одержаної однорідної мішаної задачі (типу 1) знаходимо методом відокремлення змінних. Будемо мати

$$W(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

де

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \left( \frac{v_0 x^2}{2l} - \frac{v_0 \text{ch} x}{\text{sh} l} \right) \cos \frac{\pi k}{l} x dx = \begin{cases} v_0 l^{-1} (l^2 - 2), & k = 0; \\ 2l^3 v_0 (\pi k)^{-2} [l^2 + (\pi k)^2]^{-1} \cdot (-1)^k, & k > 0. \end{cases}$$

Тоді

$$u(x, t) = e^{-t} W(x, t) + v_0 \operatorname{sh}^{-1} l \operatorname{ch} x.$$

**Приклад 3.** Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l],$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

*Розв'язування.* Розв'язок за методом Фур'є шукаємо у вигляді

$$u(x, t) = T(t) \cdot X(x) \neq 0.$$

З умови рівняння отримуємо

$$T'X = a^2 TX'' - \beta TX,$$

$$\frac{T'}{T} = -a^2 \frac{X''}{X} - \beta.$$

Відокремлюючи змінні, маємо рівняння для функції  $T(t)$

$$T' + (a^2 \lambda + \beta) T = 0,$$

та задачу Штурма-Ліувілля для функції  $X(x)$

$$X'' + \lambda X = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0,$$

де  $\lambda = \text{const}$ .

Розв'язок задачі Штурма-Ліувілля відомий:

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2,$$

$$X_n = C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad C_n = \text{const}.$$

Підставляючи  $\lambda_n$  в рівняння для  $T(t)$  та розв'язуючи його, знаходимо

$$T_n(t) = C_n^* e^{-\left( \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 + \beta \right) t}, \quad C_n^* = \text{const}.$$

Отже,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left( \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 + \beta \right) t} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де  $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$  знаходимо з використанням початкової умови.

Матимемо тоді

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 + \beta\right)t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \text{ де } A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

**Приклад 4.** Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l],$$

$$u(0, t) = \alpha, \quad u(l, t) = \beta, \quad t \geq 0,$$

де  $\alpha, \beta - \text{const.}$

*Розв'язування.* Щоб звести неоднорідні крайові умови задачі до однорідних введемо наступну заміну:

$$u(x, t) = \omega(x, t) + \alpha + \frac{\beta - \alpha}{l} x,$$

де  $\omega(x, t)$  – нова невідома функція. Тоді

$$u_t(x, t) = \omega_t(x, t),$$

$$u_x(x, t) = \omega_x(x, t) + \frac{\beta - \alpha}{l},$$

$$u_{xx}(x, t) = \omega_{xx}(x, t),$$

$$u(x, 0) = \omega(x, 0) + \alpha + \frac{\beta - \alpha}{l} x = 0 \Rightarrow \omega(x, 0) = \frac{\alpha - \beta}{l} x - \alpha,$$

$$u(0, t) = \omega(0, t) + \alpha = \alpha \Rightarrow \omega(0, t) = 0,$$

$$u(l, t) = \omega(l, t) + \alpha + \beta - \alpha = \omega(l, t) + \beta = \beta \Rightarrow \omega(l, t) = 0.$$

Отже, маємо наступну крайову задачу для функції  $\omega(x, t)$ :

$$\omega_t = a^2 \omega_{xx}, \quad t > 0,$$

$$\omega(x, 0) = \frac{\alpha - \beta}{l} x - \alpha, \quad x \in [0, l],$$

$$\omega(0, t) = 0, \quad \omega(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Як відомо

$$\omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \left( \frac{\alpha - \beta}{l} x - \alpha \right) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \\ &= \frac{2}{l} \left( \frac{\alpha - \beta}{l} \int_0^l x \sin \frac{\pi n}{l} x dx - \alpha \int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x dx \right) = \\ &= \frac{2}{l} \left( -\frac{\alpha - \beta}{l} \frac{l}{\pi n} \int_0^l x d \left( \sin \frac{\pi n}{l} x \right) - \alpha \frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} x \Big|_0^l \right) = \\ &= \frac{2}{l} \left( \frac{\beta - \alpha}{\pi n} \left( x \cos \frac{\pi n}{l} x \Big|_0^l - \int_0^l \cos \frac{\pi n}{l} x dx \right) + \frac{\alpha l}{\pi n} \left( (-1)^n - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{2}{l} \left( \frac{\beta - \alpha}{\pi n} \left( l(-1)^n - \frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{l} x \Big|_0^l \right) + \frac{\alpha l}{\pi n} \left( (-1)^n - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{2}{l} \left( \frac{\beta - \alpha}{\pi n} l(-1)^n + \frac{\alpha l}{\pi n} (-1)^n - \frac{\alpha l}{\pi n} \right) = \\ &= \frac{2}{l} \left( \frac{\beta l}{\pi n} (-1)^n - \frac{\alpha l}{\pi n} \right) = \frac{2}{\pi n} \left( \beta (-1)^n - \alpha \right). \end{aligned}$$

Повертаючись до проведеної заміни, маємо

$$u(x, t) = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \beta (-1)^n - \alpha \right) e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

## 11.2. Мішані задачі для напівнескінченного стержня з теплоізолюваною бічною поверхнею

При дослідженні процесів поширення тепла в напівнескінченному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею, кінець якого розміщений у початку координат, ми приходимо до однієї з наступних мішаних задач:

в області  $\Omega = \{(x, t) \mid x > 0, t > 0\}$  знайти розв'язок рівняння

$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t)$ , який справджує початкову умову

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \geq 0,$$

та одну з крайових умов на кінці стержня:

- 1)  $u(0, t) = \mu_1(t), \quad t \geq 0$  (задана температура);
- 2)  $u_x(0, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0$  (заданий тепловий потік);
- 3)  $u_x(0, t) - h(u(0, t) - \mu_3(t)) = 0, \quad t \geq 0$  (заданий теплообмін по закону

Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого рівна  $\mu_3(t)$ ).

Універсальним методом інтегрування мішаних задач такого вигляду є метод інтегрального перетворення Фур'є. Проте в деяких частинних випадках вдається знайти розв'язок за допомогою простіших методів (при цьому функції  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$  і  $\mu_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  вважаємо обмеженими і неперервними відповідно в областях  $\Omega$ ,  $x \geq 0$  та  $t \geq 0$ ). Зокрема, це стосується випадків, коли кінець стержня теплоізований або підтримується при нульовій температурі.

### 1) Метод непарного продовження. Мішана задача

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad x \geq 0; \\ u(0, t) &= 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

(кінець стержня підтримується при нульовій температурі) для  $x \geq 0$  еквівалентна задачі Коші

$$\begin{aligned} V_t &= a^2 V_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ V(x, 0) &= \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0; \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(задаємо непарне продовження початкової функції). Тоді розв'язок мішаної задачі  $u(x, t) = V(x, t)|_{x \geq 0}$ , де  $V(x, t)$  знаходиться за допомогою формули

$$\text{Пуассона } u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x, t, \xi) d\xi, \text{ де } G(x, t, \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}.$$

### 2) Метод парного продовження. Мішана задача

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad x \geq 0; \\ u_x(0, t) &= 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$



(кінець стержня теплоізований) при  $x \geq 0$  еквівалентна задачі Коші

$$V_t = a^2 V_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$V(x, 0) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0; \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

(задаємо парне продовження початкової функції). Тоді знову розв'язок мішаної задачі  $u(x, t) = V(x, t)|_{x \geq 0}$ , де  $V(x, t)$  знаходиться також за допомогою формули Пуассона.

**Приклад.** Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному напівнескінченному стержні з теплоізованою бічною поверхнею, кінець якого підтримується при нульовій температурі, якщо початкова температура стержня рівна  $A(1 - \cos x)$ ,  $A = \text{const}$ , а всередині стержня діють джерела тепла інтенсивності  $6Ae^{-t} \sin x$ .

*Розв'язування.* Математична модель задачі:

$$u_t = 0,25u_{xx} + 6Ae^{-t} \sin x, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$u(x, 0) = A(1 - \cos x), \quad x \geq 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді суми  $u(x, t) = V(x, t) + Z(x, t)$ , де

$$V_t = 0,25V_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$Z_t = 0,25Z_{xx} + 6Ae^{-t} \sin x, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$1) \quad V(x, 0) = A(1 - \cos x), \quad x \geq 0; \quad 2) \quad Z(x, 0) = 0, \quad x \geq 0;$$

$$V(0, t) = 0, \quad t \geq 0;$$

$$Z(0, t) = 0, \quad t \geq 0;$$

До першої мішаної задачі застосуємо метод непарного продовження:

$V(x, t) = W(x, t)|_{x \geq 0}$ , де

$$W_t = 0,25W_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$W(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} A(1 - \cos x), & x \geq 0; \\ A(\cos x - 1), & x < 0. \end{cases}$$

Згідно з формулою Пуассона

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t}} d\xi = A\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{A}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \cos \xi \left( e^{-\frac{(\xi+x)^2}{t}} - e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t}} \right) d\xi,$$

де  $\Phi(z)$  – «інтеграл помилок».

Згідно до принципу Дюгамеля розв'язок другої мішаної задачі будемо шукати у вигляді інтеграла  $Z(x, t) = \int_0^t R(x, t - \tau) d\tau$ , де

$$R_t(x, t - \tau) = 0,25 R_{xx}(x, t - \tau), \quad t > \tau, \quad x > 0;$$

$$R(x, 0) = 6Ae^{-x} \sin x, \quad x \geq 0;$$

$$R(0, t - \tau) = 0, \quad t \geq \tau.$$

Початкова функція є непарною, тому можна одразу застосувати формулу Пуассона. Одержимо

$$R(x, t - \tau) = 8Ae^{-x} \sin x; \quad Z(x, t) = \int_0^t R(x, t - \tau) d\tau = 8A \sin x (1 - e^{-t}).$$

Тоді розв'язок вихідної мішаної задачі буде (для всіх  $t \geq 0, x \geq 0$ )

$$u(x, t) = 8A \sin x (1 - e^{-t}) + A\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{A}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \cos \xi \left( e^{-\frac{(\xi+x)^2}{t}} - e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t}} \right) d\xi.$$

### ***Завдання для самоконтролю***

1. Пояснити ідеї методу відокремлення змінних побудови розв'язків для кожного типу мішаних задач, аналогічність та відмінність отримування розв'язку.
2. Інтеграл Пуассона, його властивості та застосування в прикладних задачах.
3. Зміст функції  $\Phi(z)$  – «інтеграла помилок».
4. Пояснити принцип Дюгамеля.

### ***Індивідуальні завдання***

**Завдання 1.** Розв'язати крайову задачу для рівняння теплопровідності за завданням 1 попередньої теми, якщо

$$u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, 0 < x < l, t > 0,$$

$\beta$  – номер варіанту, початкові та крайові умови залишити тими ж. Пояснити фізичний зміст задачі.

**Завдання 2.** Розв'язати крайову задачу для рівняння теплопровідності за завданням 1, якщо  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$  із однорідною початковою функцією  $u(x, 0) = 0$ ,  $0 < x < l$  та неоднорідними крайовими умовами  $u(0, t) = \alpha$ ,  $u(l, t) = \beta$ , де  $\alpha$  – номер варіанту,  $\beta$  – підібрати зручним числом (із довжини стержня). Пояснити фізичний зміст задачі.

**Завдання 3.** Для одного із завдань зобразити графічно отриманий розв'язок.

## Тема 12. Задачі Коші для одновимірного рівняння теплопровідності.

### Двовимірна мішана задача

#### 12.1. Постановка задачі Коші для параболічних рівнянь, її розв'язування

В тривимірному просторі  $E_3$  розглянемо деяке досить велике тіло  $G$ , яке обмежене поверхнею  $S$ . Всередині даного тіла розглянемо об'єм  $V$ , який знаходиться на значній відстані від поверхні  $S$ . Протягом деякого проміжку часу температура об'єму  $V$  не буде залежати від теплового режиму на поверхні  $S$  і враховувати розміри тіла  $G$  немає потреби. В даному випадку вважаємо, що тіло  $G$  співпадає з усім простором  $E_3$ . Таким чином, приходимо до задачі Коші: у фазовому просторі  $\Omega = E_3 \times (0; +\infty)$  знайти розв'язок рівняння теплопровідності [16]

$$u_t(x, y, z, t) = a^2 \Delta u(x, y, z, t) + f(x, y, z, t), \quad (12.1)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3. \quad (12.2)$$

Тут  $\varphi(x, y, z)$  – задана неперервна і обмежена функція в просторі  $E_3$ .

##### 12.1.1. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є) для задачі Коші в одновимірному випадку

Знайдемо обмежений розв'язок у фазовій площині  $\Omega = \{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty, t > 0\}$  наступної задачі Коші:

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad t > 0, \quad (12.3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad (12.4)$$

де  $\varphi(x)$  – задана обмежена і неперервна функція.

Обмежений нетривіальний розв'язок задачі (12.3)–(12.4) шукаємо у вигляді

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0. \quad (12.5)$$

Підставивши (12.5) у (12.3) та відокремивши змінні, отримаємо два рівняння

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (12.6)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (12.7)$$

де  $\lambda$  – деяке число.

Розв'язком лінійного диференціального рівняння першого порядку (12.6) є функція

$$T(t) = C_1 \cdot e^{-\lambda a^2 t}, \quad (12.8)$$

де  $C_1 = \text{const}$ . Як видно з (12.8), обмежений розв'язок можливий лише у випадку, коли  $\lambda \geq 0$ . Розв'язком лінійного диференціального рівняння другого порядку (12.7) при  $\lambda \geq 0$  є функція

$$X(x) = C_2 \cos \sqrt{\lambda} x + C_3 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

де  $C_2, C_3$  – деякі константи, значення яких, взагалі кажучи, залежить від  $\lambda$ .

Покладемо  $\lambda = k^2$ ,  $-\infty < k < +\infty$ . Це ми маємо право робити, оскільки  $\lambda \geq 0$ .

Тоді, згідно (12.5)

$$u_k(x, t) = (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) e^{-k^2 a^2 t},$$

де  $A(k) = C_1 \cdot C_2$ ,  $B(k) = C_1 \cdot C_3$  – деякі константи, що залежать від  $k$ . В силу лінійності та однорідності рівняння (12.3) його розв'язок можна подати у вигляді

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_k(x, t) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) e^{-k^2 a^2 t} dk. \quad (12.9)$$

Константи  $A(k)$ ,  $B(k)$  знайдемо з початкової умови (12.4)

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) dk = \varphi(x). \quad (12.10)$$

Подаючи функцію  $\varphi(x)$  у вигляді інтеграла Фур'є

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos(k(x-\xi)) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos(k\xi) d\xi \cdot \cos(kx) + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin(k\xi) d\xi \cdot \sin(kx) \right] dk \end{aligned}$$

і порівнюючи його з (12.10), отримаємо

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos(k\xi) d\xi, \quad B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin(k\xi) d\xi.$$

Зауважимо, що теорія інтегралів Фур'є є узагальненням теорії рядів Фур'є і вищенаведена формула для  $\varphi(x)$  відіграє в ній фундаментальну роль.

Підставляючи знайдені коефіцієнти в (12.9), одержуємо

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-k^2 a^2 t} \cos k(\xi - x) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-k^2 a^2 t} \cos k(\xi - x) d\xi. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Тут використовується парність підінтегральної функції за  $k$ . Використовуючи

формулу  $\int_0^{+\infty} e^{-k^2 c^2} \cos \beta k dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}, \quad c \neq 0,$  та змінюючи порядок

інтегрування в (12.11), дістанемо

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} \cos k(\xi - x) dk = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2} t} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2} t} d\xi. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Формула (12.12) називається **формулою Пуассона**.

Безпосередньо перевіркою легко встановити, що функція

$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2} t}$ , як функція змінних  $(x, t) \in \Omega$  задовольняє рівняння

теплопровідності (12.3). Дана функція називається **фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності**.

**Зауваження.** Справедлива формула  $\int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} \cos \beta k dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}, c \neq 0,$

якою ми скористались вище.

### 12.1.2. Задача Коші в n-вимірному просторі

У випадку  $n$ -вимірного простору  $E_n$  фундаментальним розв'язком однорідного рівняння теплопровідності буде функція

$$G(P, Q, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}},$$

$$\text{де } P = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad Q = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2},$$

а розв'язком задачі Коші

$$\begin{aligned} u_t(P, t) &= a^2 \Delta u(P, t), \quad (P, t) \in E_n \times (0; +\infty), \\ u(P, 0) &= \varphi(P), \quad P \in E_n, \end{aligned}$$

в класі обмежених функцій є

$$u(P, t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_n \varphi(Q) G(P, Q, t) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned} u_t(P, t) &= a^2 \Delta u(P, t) + f(P, t), \quad (P, t) \in \Omega = E_n \times (0; +\infty), \\ u(P, 0) &= \varphi(P), \quad P \in E_n, \end{aligned}$$

де функції  $f(P, t)$  та  $\varphi(P)$  є неперервними та обмеженими, набуває вигляду

$$\begin{aligned} u(P, t) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_n \varphi(Q) G(P, Q, t) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n + \\ &+ \int_0^t \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_n f(Q, \tau) G(P, Q, t - \tau) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n d\tau. \end{aligned}$$

**Приклади розв'язування задачі Коші для рівнянь параболічного типу**

**Приклад 1.** Нехай  $\Delta f(X, t) \equiv 0$  для будь-якого  $X \in E_n$  при кожному фіксованому  $t \geq 0$ . Довести, що функція

$$u(X, t) = \int_0^t f(X, \tau) d\tau$$

є розв'язком задачі Коші:

$$u_t = a^2 \Delta u + f(X, t),$$

$$u|_{t=0} = 0.$$

*Доведення.* Безпосередньою перевіркою переконаємось в справедливості твердження. Очевидно, що

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t f(X, \tau) d\tau \right) = f(X, t), \quad \Delta u = \int_0^t \Delta f(X, \tau) d\tau = 0.$$

Отже,

$$u_t - a^2 \Delta u = f(X, t) - a^2 \cdot 0 = f(X, t).$$

Крім того,

$$u|_{t=0} = \left( \int_0^t f(X, \tau) d\tau \right) \Big|_{t=0} = 0.$$

**Приклад 2.** Розв'язати задачу Коші:

$$u_t = 4u_{xx} + t + e^t,$$

$$u(x, 0) = 2.$$

*Розв'язування.* Скористаємось результатами прикладу 1. Зведемо початкову умову до однорідної. Для цього введемо заміну  $u(x, t) = \omega(x, t) + 2$ , де  $\omega(x, t)$  – нова невідома функція. Тоді для функції  $\omega(x, t)$  отримуємо наступну крайову задачу

$$\omega_t = 4\omega_{xx} + t + e^t,$$

$$\omega(x, 0) = 0.$$

Тут  $f(x, t) = t + e^t$ ,  $\Delta f(x, t) = f_{xx} = 0$ . Тому, згідно до прикладу 1,

$$\omega(x, t) = \int_0^t (\tau + e^\tau) d\tau = \frac{t^2}{2} + e^t - 1.$$

Повертаючись до проведеної заміни, маємо

$$u(x, t) = \omega(x, t) + 2 = 1 + \frac{t^2}{2} + e^t.$$



**Приклад 3.** Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному нескінченному стержні при вільному теплообміні (відсутні внутрішні джерела тепла), якщо початкова температура точок стержня задана функцією:

а)  $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{4a^2}};$

б)  $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > l; \\ U_0 = \text{const}, & |x| \leq l. \end{cases}$

*Розв'язування.* а) Маємо задачу Коші (12.3), (12.4), розв'язок якої задається формулою (12.12). Застосуємо її до прикладу а):

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t} - \frac{\xi^2}{4a^2}\right) d\xi.$$

Виділимо в показнику степеня під інтегралом повний квадрат за змінною  $\xi$ . Одержимо:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{[\xi(t+1) - x]^2}{4a^2 t(t+1)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t+1)}\right) d\xi.$$

Введемо підстановку  $\alpha = \frac{\xi(t+1) - x}{2a\sqrt{t(t+1)}}$ ,  $d\xi = \frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} d\alpha$ . Тоді

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t+1)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t+1)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi(t+1)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t+1)}}.$$

б) Застосуємо тепер формулу (12.12) до прикладу б):

$$u(x, t) = \frac{U_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-l}^l \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right) d\xi.$$

Підстановка  $\alpha = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$ ,  $d\xi = 2a\sqrt{t} d\alpha$  дає

$$u(x, t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha - \int_0^{\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right).$$

Виразивши інтеграли в дужках через «інтеграл помилок»  $\Phi(z)$  і врахувавши непарність цієї функції, одержимо остаточно:

$$u(x,t) = \frac{U_0}{2} \left[ \Phi\left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$$

*Зауваження.* Якщо в однорідному ізотропному нескінченному стержні діють джерела тепла інтенсивності  $f(x,t)$ , то температура  $u(x,t)$  повинна бути розв'язком неоднорідного рівняння теплопровідності

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t). \quad (12.13)$$

Розв'язок задачі Коші (12.13), (12.4), якщо функції  $f(x,t)$  і  $\varphi(x)$  є неперервними і обмеженими відповідно в  $\Omega$  та на осі  $x \in \mathbb{R}$ , шукається у вигляді суми  $u(x,t) = V(x,t) + Z(x,t)$ , де функції  $V(x,t)$  і  $Z(x,t)$  – розв'язки наступних задач Коші:

$$\begin{aligned} 1) \quad & Z_t = a^2 Z_{xx}, \quad (x,t) \in \Omega; \\ & Z(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}; \\ 2) \quad & V_t = a^2 V_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega; \\ & V(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Розв'язок першої задачі дається формулою Пуассона

$$Z(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}\right) d\xi.$$

Згідно принципу Дюгамеля функцію  $V(t,x)$  шукаємо у вигляді інтеграла

$$V(x,t) = \int_0^t W(x,t-\tau) d\tau,$$

де  $W(x,t-\tau)$  визначається із задачі Коші

$$\begin{aligned} W_t(x,t-\tau) &= a^2 W_{xx}(x,t-\tau), \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}; \\ W(x,0) &= f(x,\tau), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

і дається формулою Пуассона

$$W(x,t-\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) \cdot \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\xi.$$

Тоді розв'язок задачі Коші (12.13), (12.4) буде мати вигляд

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t - \tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2(t - \tau)}\right) d\xi d\tau. \quad (12.14)$$

## 12.2. Двовимірні мішані задачі

Схема інтегрування двовимірної змішаної задачі для рівняння теплопровідності аналогічна схемі розв'язування змішаної задачі для рівняння коливань прямокутної мембрани.

Знайдемо розв'язок крайової задачі

$$u_t(x, y, t) = a^2(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)), t > 0, 0 < x < b, 0 < y < c, \quad (12.15)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq c, \quad (12.16)$$

$$u(0, y, t) = u(b, y, t) = 0, \quad (12.17)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, c, t) = 0, t \geq 0. \quad (12.18)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(x, y, t) = V(x, y)T(t) \neq 0. \quad (12.19)$$

Підставляючи (12.19) у (12.15) та крайові умови (12.17), (12.18) і відокремлюючи змінні, отримуємо рівняння для функції  $T(t)$

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (12.20)$$

та задачу Штурма–Ліувілля для функції  $V(x, y)$

$$\begin{aligned} V_{xx} + V_{yy} + \lambda V &= 0, \\ V(0, y) &= V(b, y) = 0, \\ V(x, 0) &= V(x, c) = 0, \lambda = \text{const}. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Задача на власні значення (12.21) розв'язана раніше для рівняння коливання мембрани

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m} &= \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2, \\ V_{n,m} &= C_{n,m} \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{c} y. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені власні значення  $\lambda_{n,m}$  у рівняння (12.20) та зінтегрувавши його, одержимо

$$T_{n,m}(t) = C_{n,m}^* e^{-a^2 \lambda_{n,m} t}.$$

Отже, частковим розв'язком рівняння (12.15), який задовольняє крайові умови (12.17), (12.18), буде

$$\begin{aligned} u_{n,m}(x, y, t) &= V_{n,m}(x, y) \cdot T_{n,m}(t) = \\ &= A_{n,m} e^{-a^2 \lambda_{n,m} t} \sin \frac{\pi n}{b} x \cdot \sin \frac{\pi m}{c} y, \end{aligned}$$

де  $A_{n,m} = C_{n,m} \cdot C_{n,m}^*$ .

В силу лінійності та однорідності рівняння (12.15) сума його часткових розв'язків буде загальним розв'язком даного рівняння. Тобто,

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} e^{-a^2 \lambda_{n,m} t} \sin \frac{\pi n}{b} x \cdot \sin \frac{\pi m}{c} y.$$

Використовуючи умову (12.16), отримаємо

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin \frac{\pi n}{b} x \cdot \sin \frac{\pi m}{c} y = \varphi(x, y).$$

Тобто,  $A_{n,m} = \frac{4}{bc} \int_0^b \int_0^c \varphi(\xi, \eta) \sin \frac{\pi n}{b} \xi \cdot \sin \frac{\pi m}{c} \eta d\xi d\eta$  - коефіцієнти розкладу

функції  $\varphi(x, y)$  в подвійний ряд Фур'є за системою власних функцій

$$V_{n,m}(x, y) = \sin \frac{\pi n}{b} x \cdot \sin \frac{\pi m}{c} y.$$

### 12.3. Перша мішана крайова задача для параболічного рівняння в крузі

Розглянемо першу мішану крайову задачу для однорідного параболічного рівняння в крузі радіуса  $R$ . Перейшовши до полярних координат, отримаємо

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad (12.22)$$

$$u(r, \theta, 0) = \varphi(r, \theta), \quad (12.23)$$

$$u(r_0, \theta, t) = 0. \quad (12.24)$$

Як видно з попереднього параграфу, розв'язок задачі такого типу можна подати у вигляді

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m}^* e^{-a^2 \lambda_{n,m} t} V_{n,m}(r, \theta), \quad (12.25)$$

де підсумовування розповсюджується на всі власні функції задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \lambda V &= 0, V \neq 0, \\ u(r_0, \theta) &= 0, \\ V(r, \theta) &= V(r, \theta + 2\pi), |V(r, \theta)| < \infty. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Задача (12.26) на власні значення досліджується також при вивченні коливань круглої мембрани. Кожному власному значенню  $\lambda_{n,m} = \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} \right)^2$

відповідають дві власні функції

$$\bar{V}_{n,m} = J_n \left( r \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} \right) \cos n\theta, \quad \bar{\bar{V}}_{n,m} = J_n \left( r \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} \right) \sin n\theta,$$

де  $\mu_m^{(n)}$  – корінь рівняння  $J_n(\mu) = 0$ . Використовуючи вирази для  $V_{n,m}(r, \theta)$  та  $\lambda_{n,m}$  із (12.25), одержимо

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{n,m} \cos n\theta + B_{n,m} \sin n\theta) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) e^{-a^2 \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} \right)^2 t},$$

де коефіцієнти  $A_{n,m}$ ,  $B_{n,m}$  визначаються з початкової умови (12.23)

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \varphi(r, \theta) J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \cos n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left( J_n'(\sqrt{\lambda_{n,m}} r_0) \right)^2}, \quad B = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \varphi(r, \theta) J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \sin n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left( J_n'(\sqrt{\lambda_{n,m}} r_0) \right)^2},$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, n \neq 0; \\ 2, n = 0. \end{cases}$$

**Приклад** (двовимірна мішана задача). Знайти розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці  $0 \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq c$ , якщо початкова її температура рівна нулеві, край  $y = 0$  теплоізований, а на краях  $x = 0$ ,  $x = b$  та  $y = c$  задані закони зміни температури – відповідно  $0$ ,  $bt$  і  $tx$ . Інтенсивність джерел тепла, розміщених усередині пластинки, рівна  $x(1 - 0,25(b - x)\cos\frac{3\pi}{2c}y)$

*Розв'язування.*

Відповідна математична модель:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2(u_{xx} + u_{yy}) + x(1 - 0,25(b - x)\cos\frac{3\pi}{2c}y), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c; \\ u(x, y, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c; \\ u(0, y, t) &= 0, \quad u(b, y, t) = bt, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c; \\ u_y(x, 0, t) &= 0, \quad u(x, c, t) = tx, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b. \end{aligned}$$

*Перший етап.* Крайові умови неоднорідні, тому зводимо їх до однорідних підстановкою  $u(x, y, t) = V(x, y, t) + tx$  (допоміжна функція, яка повинна справджувати чотири крайові умови, визначається підбором). Тоді для  $V(x, y, t)$  одержимо мішану задачу:

$$V_t = a^2(V_{xx} + V_{yy}) - 0,25x(b - x)\cos\frac{3\pi}{2c}y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c; \quad (12.27)$$

$$V(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c; \quad (12.28)$$

$$V(0, y, t) = 0, \quad V(b, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$V_y(x, 0, t) = 0, \quad V(x, c, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Оскільки вільний член у рівнянні справджує крайові умови, то для знаходження розв'язку застосовний метод Фур'є.

*Другий етап.* В одержаній мішаній задачі крайові умови однорідні, але рівняння неоднорідне (задача типу 2). Отже, спершу потрібно знайти власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі:

$$W_t = a^2(W_{xx} + W_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$W(0, y, t) = 0, \quad W(b, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$W_y(x, 0, t) = 0, \quad W(x, c, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Поклавши  $W(x, y, t) = Q(t) \cdot Z(x, y) \neq 0$ , тоді в одержаній двовимірній задачі на власні значення  $Z(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$ , розв'язуємо дві одновимірні задачі Штурма-Ліувілля і знаходимо

$$Z_{n,k}(x, y) = \sin \frac{\pi n}{b} x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2c} y, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

*Третій етап.* Функцію  $V(x, y, t)$  шукаємо у вигляді ряду по знайденій системі власних функцій:

$$V(x, y, t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} R_{n,k}(t) \sin \frac{\pi n}{b} x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2c} y. \quad (12.29)$$

Коефіцієнти  $R_{n,k}(t)$  знаходимо підстановкою ряду (12.29) у рівняння та початкову умову. Поставивши відповідні задачі Коші та зінтегрувавши їх, одержимо:

$$R_{n,k}(t) = \frac{f_{n,k}}{a^2 \lambda_{n,k}} \left( 1 - e^{-a^2 \lambda_{n,k} t} \right), \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad (12.30)$$

де

$$\lambda_{n,k} = \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left( \frac{(2k-1)\pi}{2c} \right)^2,$$

$$f_{n,k} = \frac{0,25 \int_0^b \int_0^c (x-b) \cos \frac{3\pi}{2c} y \sin \frac{\pi n}{b} x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2c} y dy dx}{\int_0^b \int_0^c \sin^2 \frac{\pi n}{b} x \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{2c} y dy dx} = \begin{cases} 0, & k \neq 2, \quad n = 2m; \\ 2b^2 (\pi n)^{-3}, & k = 2, \quad n = 2m-1. \end{cases}$$

Підставивши (12.30) у ряд (12.29), дістанемо функцію  $V(x, y, t)$ . А тоді

$$u(x, y, t) = V(x, y, t) + tx.$$

### ***Завдання для самоконтролю***

1. Сформулювати задачу Коші для рівнянь параболічного типу.
2. Провести метод Фур'є для задачі Коші в одновимірному випадку.
3. Проаналізувати схему інтегрування двовимірної мішаної задачі для рівняння теплопровідності, її відмінність від такої задачі для рівнянь гіперболічного типу.

4. Розглянути першу мішану крайову задачу для однорідного параболічного рівняння в крузі.

5. Розглянути різні математичні моделі двовимірних мішаних задач, підхід до описання їх розв'язку.

### **Індивідуальні завдання**

**Завдання 1.** Розв'язати наступні задачі.

**1.** Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному нескінченному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею при вільному теплообміні, якщо в початковий момент часу температура була рівна

а)  $\varphi(x) = e^{-x^2}$ ;

б)  $\varphi(x) = \begin{cases} T, & x \geq 0, \\ -T, & x < 0; \end{cases} \quad (T = \text{const} > 0).$

**2.** Через бічну поверхню однорідного ізотропного нескінченного стержня проходить теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури. Початкова температура стержня рівна  $A = \text{const}$ . Знайти закон зміни температури в стержні при  $t > 0$ .

**3.** Знайти розподіл температури в однорідному ( $a=1$ ) ізотропному нескінченному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею, всередині якого діють джерела тепла інтенсивності  $f(t) \cdot e^{-0,25x^2}$ , а початкова температура задається функцією

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > l, \\ U_0 = \text{const}, & 0 \leq x \leq l, \\ -U_0, & -l \leq x < 0; \end{cases} \quad (l = \text{const} > 0).$$

**4.** Дано однорідний ізотропний напівнескінченний стержень із теплоізолюваною бічною поверхнею, кінець якого підтримується при нульовій температурі. Початкова температура стержня рівна нулеві, а всередині його діють джерела тепла інтенсивності  $e^{-t} - 1$ . Знайти розподіл температури в стержні при  $t > 0$ .



**5.** Початковий розподіл температури в однорідному ізотропному ( $a = 0,5$ ) напівнескінченному стержні заданий рівністю  $u(x, 0) = e^{-x} (1 - e^{-x^2})$ . Через бічну поверхню стержня проходить теплообмін (із коефіцієнтом  $b = 0,25$ ) по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури. Кінець стержня теплоізований. Знайти закон зміни температури в стержні при  $t > 0$ .

**Завдання 2.** Зінтегрувати мішану задачу та дати її фізичну інтерпретацію.

$$1. \ u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 4;$$

$$u(x, y, 0) = 6 \sin \pi x \sin \pi y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 4;$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 4;$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 4, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$2. \ u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + A \sin \frac{3\pi}{2b} x \cos \frac{\pi}{2c} y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$u(x, y, 0) = B \sin \frac{\pi}{2b} x \cos \frac{3\pi}{2c} y, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 4;$$

$$u_y(x, 0, t) = 0, \quad u(x, c, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b \quad (A, B - \text{const}).$$

$$3. \ u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$u(x, y, 0) = y(y - c)(x^2 - b^2), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u_x(0, y, 0) = 0, \quad u(b, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, c, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

$$4. \ u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$u(x, y, 0) = (3 \sin \frac{\pi}{b} x + 2 \sin \frac{6\pi}{b} x) \sin \frac{2\pi}{c} y, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(b, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, c, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

$$5. u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$u(x, y, 0) = (5 + \cos \frac{3\pi}{c} y) \sin \frac{3\pi}{b} x, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(b, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u_y(x, 0, t) = 0, \quad u_y(x, c, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

$$6. u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin \frac{\pi}{b} x \sin \frac{\pi}{2c} y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(b, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u_y(x, c, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b \quad (A = \text{const}).$$

$$7. u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$$

$$u(x, y, 0) = 2 \sin \frac{5\pi}{4} y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$u_x(0, y, t) = 0, \quad u_x(1, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u_y(x, 2, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$8. u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$u(x, y, 0) = xy(b - x)(y - c), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(b, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, c, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

$$9. u_t = 16(u_{xx} + u_{yy}) - (3t^2 + 2) \cos \frac{3\pi}{4} x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 3;$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3;$$

$$u_x(0, y, t) = 0, \quad u(2, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 3;$$

$$u_y(x, 0, t) = 0, \quad u_y(x, 3, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$10. u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$u(x, y, 0) = \left(5 + \cos \frac{3\pi}{c} y\right) \sin \frac{3\pi}{b} x, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(b, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u_y(x, 0, t) = 0, \quad u_y(x, c, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

## Тема 13. Крайові задач для рівнянь еліптичного типу

### 13.1. Постановка основних крайових задач

До рівнянь еліптичного типу [17] приводить вивчення стаціонарних процесів різної фізичної природи (теплопровідність, дифузія, рівновага та інші). Одним із простіших рівнянь еліптичного типу є *рівняння Лапласа*

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

**Означення.** Функція  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  називається *гармонічною* в обмеженій області  $D$ , якщо вона в цій області двічі неперервно-диференційовна за аргументами і справджує рівняння Лапласа.

Функція  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  називається *гармонічною* в нескінченній області  $D^*$ , якщо в кожній точці цієї області, що знаходиться на скінченній віддалі від початку координат, функція двічі неперервно-диференційовна за всіма аргументами, справджує рівняння Лапласа і для досить великих  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  має місце нерівність (умова регулярності на нескінченності)

$$|u(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq Cr^{2-n}, \quad C = \text{const}.$$

У випадку двовимірного простору умова регулярності на нескінченності набуває вигляду  $|u(x, y)| \leq C$ ,  $C = \text{const}$ , тобто є умовою обмеженості функції для досить великих  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Рівняння  $\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  називається *рівнянням Пуассона*.

**Теорема 1 (принцип мінімакса для гармонічних функцій).** Гармонічна в обмеженій області  $D$  і неперервна в замиканні  $\bar{D} = D \cup S$  функція  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  досягає свого найбільшого і найменшого значення на границі  $S$  області  $D$ .

### **Постановка основних крайових задач для рівняння Лапласа**

1. **Внутрішня (зовнішня) задача Діріхле:** знайти гармонічну в  $D$  ( $D^*$ ) і неперервну в  $\bar{D}$  ( $\bar{D}^*$ ) функцію  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , яка на межі  $S$  області набуває заданих значень:  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)|_S = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , де  $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – задана неперервна на  $S$  функція.

2. **Внутрішня (зовнішня) задача Неймана:** знайти гармонічну в  $D$  ( $D^*$ ) і неперервну разом із частинними похідними першого порядку в  $\bar{D}$  ( $\bar{D}^*$ ) функцію  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , яка на межі  $S$  області справджує умову

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_S = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до  $S$ , а  $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – задана неперервна на  $S$  функція, яка для коректності постановки задачі повинна справджувати умову

$$\iint_S \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) ds = 0.$$

( умова стаціонарності теплового поля).

3. **Третя внутрішня (зовнішня) крайова задача:** знайти гармонічну в  $D$  ( $D^*$ ) і неперервну разом із частинними похідними першого порядку в  $\bar{D}$  ( $\bar{D}^*$ ) функцію  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , яка на межі  $S$  області справджує умову

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \varphi_3(x_1, x_2, \dots, x_n) u \right]_S = \varphi_4(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де  $\varphi_3(x_1, x_2, \dots, x_n)$  і  $\varphi_4(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – задані неперервні на  $S$  функції.

Аналогічно ставляться крайові задачі і для рівняння Пуассона.

**Теорема 2.** Як внутрішня, так і зовнішня задачі Діріхле для рівняння Пуассона мають не більш ніж один розв'язок у розглядуваній області (тобто, якщо розв'язок задачі Діріхле існує, то він є єдиним).

**Теорема 3.** У двовимірному просторі довільні два розв'язки задачі Неймана (внутрішньої чи зовнішньої), які мають неперервні до  $S$  частинні похідні першого порядку, відрізняються на сталий доданок.

*Зауваження.* У випадку трьох і більше незалежних змінних твердження теореми 2 справджується для внутрішньої задачі Неймана. Розв'язок зовнішньої задачі Неймана є єдиним.

Окрім сформульованих трьох основних крайових задач для рівнянь еліптичного типу, на практиці зустрічаються складніші задачі з крайовими умовами різного роду на частинах межі  $S$ .

### 13.2. Крайові задачі для прямокутних областей. Метод Фур'є

Крайові задачі для рівняння Лапласа у випадку прямокутних областей розв'язуються за допомогою методу відокремлення змінних (методу Фур'є) аналогічно до мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів.

**Приклад 1.** Знайти розподіл потенціалу  $u(x, y)$  електростатичного поля всередині прямокутника  $OACB$  зі сторонами  $OA = a, OB = b$ , якщо уздовж сторони  $OB$  потенціал розподілений згідно з законом  $U_0 y(b - y)$ , де  $U_0 = \text{const}$ , а три інші сторони заземлені. Електричні заряди всередині прямокутника відсутні.

*Розв'язування.* Складаємо математичну модель задачі:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &\equiv u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u(0, y) &= u_0 y(b - y), \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a.\end{aligned}$$

Шукаючи розв'язок цієї задачі методом відокремлення змінних (крайові умови є узгодженими) у вигляді  $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$ , з рівняння Лапласа будемо мати

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda = \text{const},$$

звідки одержимо диференціальне рівняння для функції  $X(x)$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$

а з урахуванням однорідних крайових умов на сторонах  $OA$  та  $BC$  – задачу Штурма-Ліувілля для функції  $Y(y)$ :

$$\begin{aligned} Y''(y) + \lambda Y(y) &= 0; \\ Y(0) &= 0, \quad Y(b) = 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши останню задачу, одержимо:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad Y_n(y) = C_n \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad n \in \mathbf{N}$$

(для визначеності можна покласти  $C_n = 1$ ). Підставимо знайдені власні значення  $\lambda_n$  у рівняння для функції  $X(x)$ . Загальний розв'язок одержаного рівняння  $X_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X_n(x) = 0$  запишеться у вигляді

$$X_n(x) = A_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Тоді

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}x} \right) \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Із крайових умов на сторонах  $OB$  та  $AC$  одержимо систему для визначення невідомих коефіцієнтів  $A_n$  і  $B_n$ :

$$\begin{cases} A_n + B_n = \psi_n; \\ A_n e^{\frac{n\pi}{b}a} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}a} = 0, \end{cases}$$

де

$$\psi_n = \frac{2U_0}{b} \int_0^b y(b-y) \sin \frac{n\pi}{b} y dy = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \frac{8U_0 b^2}{(\pi n)^3}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Отже, для парних  $n$   $A_n = B_n = 0$ , а для непарних

$$A_n = -\frac{4U_0 b^2 e^{-\frac{n\pi}{b}a}}{(\pi n)^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b}, \quad B_n = \frac{4U_0 b^2 e^{\frac{n\pi}{b}a}}{(\pi n)^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b}.$$

Підставивши ці значення у ряд для розв'язку  $u(x, y)$  і врахувавши непарність  $n$ , одержимо

$$u(x, y) = \frac{8U_0 b^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{b}(a-x)}{(2k-1)^3 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{b} a} \sin \frac{(2k-1)\pi}{b} y.$$

*Зауваження.* Загальний розв'язок рівняння  $X_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X_n(x) = 0$  часто зручніше записати у вигляді

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x.$$

*Зауваження.* У наведеному прикладі ми будували задачу Штурма-Ліувілля для функції  $Y(y)$ , оскільки крайові умови на сторонах  $y=0$  та  $y=b$  були однорідними. Якщо ж крайові умови неоднорідні за даними змінними, то таку задачу можна за певних умов звести до двох задач, аналогічних до прикладу 1. Наприклад, розв'язок крайової задачі

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u(0, y) &= \mu_1(y), \quad u(a, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq b; \\ u(x, 0) &= \nu_1(x), \quad u(x, b) = \nu_2(x), \quad 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

можна шукати у вигляді  $u(x, y) = V(x, y) + W(x, y)$ , де  $V(x, y)$  – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} V_{xx} + V_{yy} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ V(0, y) &= 0, \quad V(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \\ V(x, 0) &= \nu_1(x), \quad V(x, b) = \nu_2(x), \quad 0 \leq x \leq a, \end{aligned}$$

а  $W(x, y)$  – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} W_{xx} + W_{yy} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ W(0, y) &= \mu_1(y), \quad W(a, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq b; \\ W(x, 0) &= 0, \quad W(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Проте тут слід пам'ятати, що такий спосіб відшукування розв'язку застосовний лише у випадку узгодженості крайових умов не тільки у вихідній, але й у двох дочірніх крайових задачах.

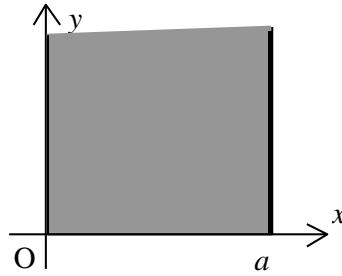
Іноді область, у якій знаходять розв'язок, може бути нескінченною.

**Приклад 2.** У півсмузі (див. малюнок)  $\{(x, y) | 0 \leq x \leq a, y \geq 0\}$  знайти розв'язок  $u(x, y)$  рівняння Лапласа, який справджує наступні крайові умови:



$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad y \geq 0;$$

$$u(x, 0) = -\sin \frac{8\pi}{a} x, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq a.$$



*Розв'язування.* Шукаючи розв'язок задачі методом відокремлення змінних (крайові умови є узгодженими) у вигляді  $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$  аналогічно до прикладу 1, одержимо:

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0,$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0;$$

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0.$$

Задачу Штурма-Ліувілля будемо для функції  $X(x)$ , поскільки цього разу однорідними є крайові умови на сторонах  $x=0$  та  $x=a$ . Розв'язавши цю задачу та при знайдених власних значеннях – рівняння для функції  $Y(y)$ , одержимо:

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$Y_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi}{a} y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a} y}, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$u_n(x, y) = \left( A_n e^{\frac{n\pi}{a} y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a} y} \right) \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Враховуючи умову обмеженості розв'язку при  $y \rightarrow \infty$ , беремо  $A_n = 0$ .  
Тоді

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n\pi}{a} y} \sin \frac{n\pi}{a} x.$$

Для визначення коефіцієнтів  $B_n$  використаємо крайову умову при  $y=0$ :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{a} x = -\sin \frac{8\pi}{a} x, \quad \text{звідки } B_n = \begin{cases} -1, & n=8; \\ 0, & n \neq 8. \end{cases}$$

Отже, розв'язок крайової задачі буде  $u(x, y) = -e^{-\frac{8\pi}{a} y} \sin \frac{8\pi}{a} x$ .

### 13.3. Метод власних функцій

Розглянемо задачу: в області  $\{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  знайти розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (13.1)$$

який справджує крайові умови

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \quad (13.2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (13.3)$$

Розв'язок цієї задачі у випадку, коли функція  $f(x, y)$  сама справджує всі чотири крайові умови, можна знайти за допомогою методу власних функцій. Для цього спочатку розв'язуємо відповідну задачу на власні значення вигляду

$$\begin{aligned} \Delta V(x, y) - \lambda V(x, y) &= 0; \\ V(0, y) &= V(a, y) = 0, \quad V(x, 0) = V(x, b) = 0. \end{aligned}$$

Шукаючи власні функції наведеної задачі методом відокремлення змінних у вигляді  $V(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$ , одержуємо:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda = \text{const},$$

звідки

$$\begin{aligned} X''(x) - \alpha X(x) &= 0; \\ X(0) &= 0, \quad X(a) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \alpha_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$\begin{aligned} Y''(y) - \beta Y(y) &= 0; \\ Y(0) &= 0, \quad Y(b) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \beta_m = -\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad Y_m(y) = C_m \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad m \in \mathbf{N};$$

$$\lambda_{n,m} = -\pi^2 \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad V_{n,m}(x, y) = C_{n,m} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad C_{n,m} = C_n \cdot C_m.$$

Покладемо для визначеності  $C_{n,m} = 1$ . Тепер розв'язок задачі (13.1)–(13.3) можна шукати у вигляді ряду за системою знайдених власних функцій

$$u(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} V_{n,m}(x, y). \quad (13.4)$$

Будемо вважати, що ряд (13.4) рівномірно збігається і його можна почленно диференціювати двічі за змінними  $x$  та  $y$ . Для визначення невідомих

коефіцієнтів  $A_{n,m}$  розкладемо функцію  $f(x, y)$  в подвійний ряд Фур'є за системою власних функцій  $V_{n,m}(x, y)$ :

$$f(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} V_{n,m}(x, y), \quad \varphi_{n,m} = \frac{\int_0^a \int_0^b f(x, y) V_{n,m}(x, y) dy dx}{\int_0^a \int_0^b V_{n,m}^2(x, y) dy dx}. \quad (13.5)$$

Підставивши (13.4) і (13.5) у рівняння (13.1), одержимо:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \Delta V_{n,m}(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Але

$$\Delta V_{n,m}(x, y) = \lambda_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Отже,

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_{n,m} A_{n,m} V_{n,m}(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Звідси  $A_{n,m} = \varphi_{n,m} \lambda_{n,m}^{-1}$  і згідно (13.4) розв'язок задачі (13.1)–(13.3) буде

$$u(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n,m}}{\lambda_{n,m}} V_{n,m}(x, y).$$

*Зауваження.* Розв'язок задачі (13.1)–(13.3) можна шукати у вигляді ряду (13.4), оскільки він справджує однорідні крайові умови. У випадку неоднорідних крайових умов, наприклад для задачі

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u(0, y) &= \mu_1(y), \quad u(a, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq b; \\ u(x, 0) &= \nu_1(x), \quad u(x, b) = \nu_2(x), \quad 0 \leq x \leq a \end{aligned} \quad (13.6)$$

розв'язок при виконанні певних умов (див. попередні приклади) можна шукати у вигляді  $u(x, y) = V(x, y) + W(x, y)$ , де  $V(x, y)$  – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} V_{xx} + V_{yy} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ V(0, y) &= \mu_1(y), \quad V(a, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq b; \\ V(x, 0) &= \nu_1(x), \quad V(x, b) = \nu_2(x), \quad 0 \leq x \leq a, \end{aligned} \quad (13.7)$$

а  $W(x, y)$  – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} W_{xx} + W_{yy} &= f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ W(0, y) &= 0, \quad W(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \\ W(x, 0) &= 0, \quad W(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Метод розв'язування задачі (13.7) поданий у зауваженні 2 до прикладу 1. Задача (13.8) аналогічна задачі (13.1)–(13.3) й інтегрується за допомогою методу власних функцій.

Проте не завжди наведені вище методи є раціональними. У деяких частинних випадках можливе застосування більш простих засобів.

**Приклад 3.** Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці  $\{(x, y) | 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b\}$ , всередині якої діють джерела тепла інтенсивності  $2x(a-x)$ , якщо краї  $x=0$  та  $x=a$  пластинки підтримуються при нульовій температурі, а інші два краї теплоізовані.

*Розв'язування.* Математична модель задачі:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 2x(a-x), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u(0, y) &= 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \\ u_y(x, 0) &= 0, \quad u_y(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

*1 спосіб (метод власних функцій).* Вільний член у рівнянні справджує усі чотири крайові умови, тому для відшукування розв'язку застосовний метод власних функцій аналогічно до задачі (13.1)–(13.3). Отже, спочатку розв'язуємо відповідну задачу на власні значення вигляду

$$\begin{aligned} \Delta V(x, y) - \lambda V(x, y) &= 0; \\ V(0, y) &= V(a, y) = 0, \quad V_y(x, 0) = V_y(x, b) = 0. \end{aligned}$$

Шукаючи власні функції наведеної задачі методом відокремлення змінних у вигляді  $V(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$ , легко знаходимо:

$$\lambda_{n,m} = -\pi^2 \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad V_{n,m}(x, y) = C_{n,m} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad m = \overline{0, \infty}.$$

Покладемо для визначеності  $C_{n,m} = 1$ . Тепер розв'язок поставленої задачі можна шукати у вигляді ряду по системі знайдених власних функцій

$$u(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} A_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Підставивши цей ряд у рівняння, одержимо:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} A_{n,m} \Delta V_{n,m}(x, y) = 2x(a - x).$$

Розкладемо функцію  $2x(a - x)$  в подвійний ряд Фур'є по системі знайдених власних функцій  $V_{n,m}(x, y)$ :  $2x(a - x) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} \varphi_{n,m} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y$ , де

$$\varphi_{n,m} = \frac{\int_0^a \int_0^b 2x(a - x) \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y dy dx}{\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi}{a} x \cos^2 \frac{m\pi}{b} y dy dx} = \begin{cases} 0, & m > 0; \\ \frac{8a^2}{(\pi n)^3} [1 - (-1)^n] & m = 0. \end{cases}$$

Але

$$\Delta V_{n,m}(x, y) = \lambda_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Отже,

$$\sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} \lambda_{n,m} A_{n,m} V_{n,m}(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} \varphi_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Звідси  $A_{n,m} = \varphi_{n,m} \lambda_{n,m}^{-1}$  і розв'язок задачі матиме вигляд

$$u(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} \frac{\varphi_{n,m}}{\lambda_{n,m}} V_{n,m}(x, y).$$

Врахувавши, що коефіцієнти Фур'є  $\varphi_{n,m}$  відмінні від нуля тільки при  $m = 0$  і  $n = 2k - 1$  (непарних) і підставивши всі знайдені величини у ряд для  $u(x, y)$ , остаточно одержимо:

$$U(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16a^4}{\pi^5 (2k - 1)^5} \sin \frac{\pi(2k-1)}{a} x.$$

*Другий спосіб (зведення неоднорідного рівняння до однорідного).* Оскільки вільний член у рівнянні є функцією тільки змінної  $x$ , а умови на краях  $x=0$  та  $x=a$  не залежать від змінної  $y$ , то наведену крайову задачу можна розглядати як аналог задачі зі стаціонарними неоднорідностями для рівнянь гіперболічного та параболічного типів. Отже, шукаємо розв'язок у вигляді

$$u(x, y) = V(x, y) + \omega(x),$$

де допоміжна функція  $\omega(x)$  повинна справджувати неоднорідне рівняння та умови на краях  $x=0$  та  $x=a$ , тобто повинна бути розв'язком крайової задачі

$$\begin{aligned}\omega''(x) &= 2x(a-x); \\ \omega(0) &= 0, \quad \omega(a) = 0.\end{aligned}$$

Зінтегрувавши цю задачу, одержимо  $\omega(x) = \frac{1}{6}(2ax^3 - x^4 - a^3x)$ , а для нової невідомої функції  $V(x, y)$  – однорідну задачу

$$\begin{aligned}V_{xx} + V_{yy} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ V(0, y) &= 0, \quad V(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \\ V_y(x, 0) &= 0, \quad V_y(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,\end{aligned}$$

звідки, очевидно, що  $V(x, y) \equiv 0$  (оскільки рівняння і всі крайові умови є однорідними, а сама задача не є задачею Неймана). Отже, розв'язок вихідної крайової задачі буде

$$u(x, y) \equiv \omega(x) = \frac{1}{6}(2ax^3 - x^4 - a^3x).$$

*Зауваження.* Якщо в задачі для нової невідомої функції  $V(x, y)$  крайові умови неоднорідні, то її розв'язок знаходиться за допомогою методу Фур'є (див. зауваження 2 до прикладу 1). При цьому за вірного підбору допоміжної функції  $\omega(x)$  або  $\omega(y)$  умови застосовності методу Фур'є виконуватимуться автоматично.

**Приклад 4.** Зінтегрувати задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 6y(y-1)^2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ u_x(0, y) &= 0, \quad u_x(1, y) = 3y - 2y^2, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u(x, 0) &= 1, \quad u_y(x, 1) + u(x, 1) = 4\cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

**Фізична інтерпретація.** а) Знайти положення рівноваги однорідної квадратної мембрани, яка піддається дії зовнішньої сили інтенсивності  $6y(y-1)^2$ , якщо край  $y=0$  мембрани зміщений на сталу величину, край  $x=0$  вільний, до краю  $x=1$  прикладена сила  $3y-2y^2$ , а край  $y=1$  пружно закріплений з коефіцієнтом жорсткості  $h=1$ , причому точки закріплення пружин рухаються за законом  $4\cos\pi x$ .

б) Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній квадратній пластинці, всередині якої діють джерела тепла інтенсивності  $6y(y-1)^2$ , якщо край  $y=0$  пластинки підтримується при сталій температурі, край  $x=0$  теплоізований, до краю  $x=1$  підводиться тепловий потік  $3y-2y^2$ , а на краї  $y=1$  проходить теплообмін з коефіцієнтом  $h=1$  з навколишнім середовищем, температура якого рівна  $4\cos\pi x$ .

**Розв'язування.** Покладемо  $u(x, y) = V(x, y) + W(x, y) + Z(x, y)$ , де нові невідомі функції є розв'язками наступних крайових задач:

$$\begin{aligned}\Delta V(x, y) &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ V_x(0, y) &= 0, \quad V_x(1, y) = 3y - 2y^2, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ V(x, 0) &= 0, \quad V_y(x, 1) + V(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;\end{aligned}\tag{13.9}$$

$$\begin{aligned}\Delta W(x, y) &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ W_x(0, y) &= 0, \quad W_x(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ W(x, 0) &= 1, \quad W_y(x, 1) + W(x, 1) = 4\cos\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1;\end{aligned}\tag{13.10}$$

$$\begin{aligned}\Delta Z(x, y) &= 6y(y-1)^2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ Z_x(0, y) &= 0, \quad Z_x(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ Z(x, 0) &= 0, \quad Z_y(x, 1) + Z(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}\tag{13.11}$$

Крайові умови в (13.9) і (13.10) є узгодженими, тому для відшукування розв'язків цих задач застосовний метод Фур'є.

Отже,  $V(x, y) = X_1(x) \cdot Y_1(y) \neq 0$ , причому для задачі Штурма-Ліувілля будуємо для функції  $Y_1(y)$ . Одержимо:

$$X_1''(x) + \lambda X_1(x) = 0,$$

$$Y_1''(y) - \lambda Y_1(y) = 0;$$

$$Y_1(0) = 0, \quad Y_1'(1) + Y_1(1) = 0.$$

Звідси  $\lambda_n = -\mu_n^2$ , де  $\mu_n$  – додатні корені рівняння  $\mu_n = -\operatorname{tg} \mu_n$  (ці корені можна визначити лише наближеними методами), а  $Y_{1n}(y) = \sin \mu_n y$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Відповідні функції  $X_{1n}(x)$  запишемо для зручності через гіперболічні функції у вигляді  $X_{1n}(x) = A_n \operatorname{sh} \mu_n x + B_n \operatorname{ch} \mu_n x$ . Тоді

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh} \mu_n x + B_n \operatorname{ch} \mu_n x) \sin \mu_n y. \quad (13.12)$$

Коефіцієнти  $A_n$  і  $B_n$  визначаємо з умов на краях  $x=0$  і  $x=1$ :

$$V_x(0, y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n A_n \sin \mu_n y = 0;$$

$$V_x(1, y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (A_n \operatorname{ch} \mu_n + B_n \operatorname{sh} \mu_n) \sin \mu_n y = 3y - 2y^2.$$

Із першої рівності маємо  $A_n = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Розклавши праву частину другої рівності в ряд Фур'є за системою власних функцій  $\{\sin \mu_n y\}$ , одержимо:

$$\mu_n B_n \operatorname{sh} \mu_n = \frac{\int_0^1 (3y - y^2) \sin \mu_n y dy}{\int_0^1 \sin^2 \mu_n y dy} = \frac{16 \sin^2 \frac{\mu_n}{2}}{\mu_n^3 (1 + \cos^2 \mu_n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (13.12), одержимо розв'язок задачі (13.9) у вигляді

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \sin^2 \frac{\mu_n}{2}}{\mu_n^4 \operatorname{sh} \mu_n (1 + \cos^2 \mu_n)} \operatorname{ch} \mu_n x \sin \mu_n y, \quad \mu_n = -\operatorname{tg} \mu_n.$$

Аналогічно розв'язується й задача (10):  $W(x, y) = X_2(x) \cdot Y_2(y) \neq 0$ , проте цього разу задачі Штурма-Ліувілля будуємо для функції  $X_2(x)$ . Одержимо:

$$Y_2''(y) + \nu Y_2(y) = 0,$$

$$X_2''(x) - \lambda X_2(x) = 0;$$

$$X_2'(0) = 0, \quad X_2'(1) = 0.$$



Звідси  $\nu_m = -(\pi m)^2$ ,  $X_{2m}(x) = \cos \pi m x$ ,  $m = \overline{0, \infty}$  (нуль теж є власним значенням). Відповідні функції  $Y_{2m}(y)$  будуть

$$Y_{2m}(y) = \begin{cases} A_0 y + B_0, & m = 0; \\ A_m \operatorname{sh} \pi m y + B_m \operatorname{ch} \pi m y, & m > 0. \end{cases}$$

Тоді

$$W(x, y) = A_0 y + B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \operatorname{sh} \pi m y + B_m \operatorname{ch} \pi m y) \cos \pi m x. \quad (13.13)$$

Коефіцієнти  $A_m$  і  $B_m$  визначаємо з умов на краях  $y = 0$  і  $y = 1$ :

$$W(x, 0) \equiv B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \pi m x = 1;$$

$$W_y(x, 1) + W(x, 1) \equiv 2A_0 + B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [(A_m + \pi m B_m) \operatorname{sh} \pi m + (B_m + \pi m A_m) \operatorname{ch} \pi m] \cos \pi m x = 4 \cos \pi x.$$

У правих частинах одержаних рівностей фігурують тільки власні функції (маємо резонансний випадок), тому можна, не використовуючи розклад у ряд Фур'є, одразу прирівняти коефіцієнти при однакових власних функціях. Тоді з першої рівності будемо мати  $B_0 = 1$ ;  $B_m = 0$ ,  $m > 0$ . З урахуванням знайдених коефіцієнтів  $B_m$  із другої рівності одержимо:  $A_0 = -0,5$ ;  $A_1 = \frac{4}{\pi \operatorname{ch} \pi + \operatorname{sh} \pi}$ ; а для всіх інших значень  $m$   $A_m = 0$ .

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (13.13), одержимо розв'язок задачі (13.10) у вигляді

$$W(x, y) = 1 - 0,5y + \frac{4 \operatorname{sh} \pi y}{\pi \operatorname{ch} \pi + \operatorname{sh} \pi} \cos \pi x.$$

Оскільки вільний член у рівнянні задачі (13.11) справджує всі чотири крайові умови, то розв'язок цієї задачі можна було б шукати за допомогою методу власних функцій у вигляді ряду

$$Z(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} A_{n,m} Y_{1n}(y) X_{2m}(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} A_{n,m} \sin \mu_n y \cos \pi m x, \quad \mu_n = -\operatorname{tg} \mu_n.$$

Проте, зваживши на простий вигляд вільного члена у рівнянні, легко побачити, що задача (13.11) аналогічна до прикладу 3 і інтегрується шляхом зведення неоднорідного рівняння до однорідного підстановкою

$$Z(x, y) = Q(x, y) + \omega(y),$$

де допоміжна функція  $\omega(y)$  повинна справджувати неоднорідне рівняння та умови на краях  $y = 0$  та  $y = 1$ , тобто повинна бути розв'язком крайової задачі

$$\begin{aligned}\omega''(y) &= 6y(y-1)^2; \\ \omega(0) &= 0, \quad \omega'(1) + \omega(1) = 0.\end{aligned}$$

Зінтегрувавши цю задачу, одержимо  $\omega(y) = \frac{1}{4}(y - 4y^3 + 2y^4)$ , а для нової невідомої функції  $Q(x, y)$  – однорідну задачу

$$\begin{aligned}Q_{xx} + Q_{yy} &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ Q_x(0, y) &= 0, \quad Q_x(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ Q(x, 0) &= 0, \quad Q_y(x, 1) + Q(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,\end{aligned}$$

звідки, очевидно, що  $Q(x, y) \equiv 0$  (див. приклад 3). Отже, розв'язок задачі (13.11) буде

$$Z(x, y) \equiv \omega(y) = \frac{1}{4}(y - 4y^3 + 2y^4)$$

Додавши знайдені розв'язки задач (13.9), (13.10) і (13.11), одержимо шуканий розв'язок вихідної крайової задачі:

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(2y^4 - y - 4y^3) + 1 + \frac{4 \operatorname{sh} \pi y}{\pi \operatorname{ch} \pi + \operatorname{sh} \pi} \cos \pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \sin^2 \frac{\mu_n}{2}}{\mu_n^4 \operatorname{sh} \mu_n (1 + \cos^2 \mu_n)} \operatorname{ch} \mu_n x \sin \mu_n y,$$

де  $\mu_n = -\operatorname{tg} \mu_n$ .

Іноді без застосування методу Фур'є вдається зінтегрувати й більш складні за (13.11) крайові задачі.

**Приклад 5.** Зінтегрувати крайову задачу:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 6y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ u_x(0, y) &= 1, \quad u_x(1, y) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u(x, 0) &= x - 1, \quad u_y(x, 1) + u(x, 1) = x - 1, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

*Розв'язування.* На вигляд задача аналігічна до прикладу 4, проте шукати її розв'язок вищенаведеним способом не можна, оскільки в дочірніх задачах крайові умови стануть неузгодженими. Отже, застосовуємо інший спосіб (див. приклад 3): покладемо

$$u(x, y) = V(x, y) + \omega(x, y),$$

де  $\omega(x, y)$  – деякий частинний розв'язок рівняння

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} = 6y, \quad (13.14)$$

котрий потрібно підібрати таким чином, щоб до одержаної задачі для  $V(x, y)$  був застосовний метод Фур'є. При цьому бажано, щоб одержана нова задача була максимально простою.

Спробуємо виконати ці умови для нашого прикладу. Очевидно, що довільна функція вигляду  $\omega(x, y) = y^3 + Ay + Bx + C$ , де  $A, B, C$  – довільні сталі, є розв'язком рівняння (13.14). Виберемо тепер сталі  $A, B, C$  таким чином, щоб справдити хоча б деякі з чотирьох крайових умов. Маємо:

$$\begin{aligned} \omega_x(0, y) &\equiv B = 1, & \omega_x(1, y) &\equiv B = 1, \\ \omega(x, 0) &\equiv Bx + C = x - 1, & \omega_y(x, 1) + \omega(x, 1) &\equiv Bx + C + 2A + 4 = x - 1. \end{aligned}$$

Легко бачити, що для  $B = 1, C = -1$  та  $A = -2$  справджуються усі чотири крайові умови. Отже, беремо  $\omega(x, y) = y^3 - 2y + x - 1$ . Тоді для  $V(x, y)$  одержимо задачу:

$$\begin{aligned} \Delta V(x, y) &= 0, & 0 < x < 1, & \quad 0 < y < 1; \\ V_x(0, y) &= 0, & V_x(1, y) &= 0, & \quad 0 \leq y \leq 1; \\ V(x, 0) &= 0, & V_y(x, 1) + V(x, 1) &= 0, & \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

звідки  $V(x, y) \equiv 0$ , а тому

$$u(x, y) \equiv \omega(x, y) = y^3 - 2y + x - 1.$$

Розглянемо задачу Неймана для рівняння Лапласа у прямокутнику  $\{(x, y) | 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b\}$ :

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u_x(0, y) &= \varphi_1(y), \quad u_x(a, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq b; \\ u_y(x, 0) &= \psi_1(x), \quad u_y(x, b) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq a.\end{aligned}$$

Умова стаціонарності теплового поля для такої задачі має вигляд

$$\int_0^b \varphi_1(y) dy = \int_0^b \varphi_2(y) dy, \quad \int_0^a \psi_1(x) dx = \int_0^a \psi_2(x) dx.$$

При невиконанні хоча б однієї з цих умов задача розв'язку не має. Проте у випадку задачі Неймана для рівняння Пуассона іноді вдається підібрати частинний розв'язок рівняння таким чином, щоб крайові умови стали узгодженими.

**Приклад 6.** Зінтегрувати крайову задачу

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ u_x(0, y) &= y - 1, \quad u_x(1, y) = y + 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u_y(x, 0) &= x, \quad u_y(x, 1) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

*Розв'язування.* Очевидно, що умова стаціонарності теплового поля тут не виконується, оскільки  $\int_0^1 (y - 1) dy \neq \int_0^1 (y + 1) dy$ . Тому розв'язок потрібно шукати у вигляді  $u(x, y) = V(x, y) + \omega(x, y)$ , де  $\omega(x, y)$  – деякий частинний розв'язок рівняння  $\Delta \omega = 2$ , причому для  $V(x, y)$  крайові умови повинні стати узгодженими. Шляхом підбору знаходимо, наприклад,  $\omega(x, y) = x^2 - x$ ; тоді для  $V(x, y)$  одержимо задачу

$$\begin{aligned}\Delta V(x, y) &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ V_x(0, y) &= y, \quad V_x(1, y) = y, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ V_y(x, 0) &= x, \quad V_y(x, 1) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Тут крайові умови є узгодженими, і задача має очевидний розв'язок

$$V(x, y) = xy + C, \quad C = \text{const}$$

(як відомо, розв'язок внутрішньої задачі Неймана завжди визначається з точністю до сталого доданка). А тоді

$$u(x, y) = V(x, y) + \omega(x, y) = xy + x^2 - x + C.$$

### ***Завдання для самоконтролю***

1. Які фізичні процеси приводять до крайових задач для рівнянь еліптичного типу?
2. Дайте означення гармонічної функції:
  - а) в обмеженій області;
  - б) в необмеженій області.
3. Записати постановку
  - а) задачі Діріхле для рівняння Лапласа у півкрузі  $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi$ ;
  - б) задачі Неймана для рівняння Лапласа у кільці  $a \leq \rho \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;
  - в) третьої крайової задачі для рівняння Пуассона у прямокутнику  $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 4$ .
4. Запишіть оператор Лапласа у полярних, циліндричних та сферичних координатах.
5. Сформулюйте принцип мінімакса для гармонічних функцій.
6. Сформулюйте теореми про розв'язок
  - а) задачі Діріхле;
  - б) задачі Неймана.
7. Метод власних функцій знаходження розв'язків крайових задач для рівнянь еліптичного типу в прямокутнику.

### ***Індивідуальні завдання***

**Завдання 1.** За прикладом 3, 4 скласти відповідну свою математичну модель задачі та розв'язати її.

**Завдання 2.** Зінтегрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію.

**2.1.**  $\Delta u(x, y) = 18xy, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b;$

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 9a^2 y + \cos \frac{2\pi}{b} y, \quad 0 \leq y \leq b;$$

$$u_y(x, 0) = u_y(x, b) = 1 + 3x^3, \quad 0 \leq x \leq a.$$

**2.2.**  $\Delta u(x, y) = 6x + 12y, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2};$

$$u_x(0, y) = u_x(2, y) = 1 + 3y^2, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2};$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y\left(x, \frac{1}{2}\right) = 3x + 1,5 + 2\cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Відповідь. а)  $u(x, y) = y\left(1 + 3x^3\right) + \frac{b \operatorname{ch} \frac{2\pi}{b} x}{2\pi \operatorname{sh} \frac{2\pi a}{b}} \cos \frac{2\pi}{b} y + \operatorname{const};$

б)  $u(x, y) = x\left(1 + 3y^2\right) + 2y^3 + \frac{2 \operatorname{ch} \pi y}{\pi \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}} \cos \pi x + \operatorname{const};$

## Тема 14. Крайові задачі для кругових областей

### 14.2. Рівняння Лапласа. Метод спуску для рівняння Пуассона

На відміну від прямокутних областей, для запису математичних моделей стаціонарних процесів у кругових областях (внутрішність або зовнішність круга, кільце, круговий сектор, криволінійний прямокутник) використовують полярні координати. Проте методи інтегрування крайових задач [17], [14] для рівнянь еліптичного типу у випадку кругових областей аналогічні методам знаходження розв'язків мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів (при цьому роль початкових умов грають крайові умови на криволінійних краях, тобто при  $\rho = \text{const}$ . У внутрішніх задачах для круга та сектора необхідно враховувати додатково умову визначеності розв'язку в нулі

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} u(\rho, \varphi) \neq \pm\infty,$$

а у зовнішніх задачах – умову регулярності на нескінченості на площині:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u(\rho, \varphi) \neq \pm\infty. \text{ Крім того, для круга та кільця розв'язок повинен бути}$$

періодичною функцією з періодом  $2\pi$ .

#### *Приклади розв'язування задач*

**Приклад 1.** Знайти стаціонарний розподіл температури всередині пластинки, яка має форму кругового сектора  $\{(\rho, \varphi) | 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq \alpha < 2\pi\}$ , якщо прямолінійні краї пластинки теплоізовані, а на дузі підтримується температура  $A \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi$ ,  $A = \text{const}$ .

*Розв'язування.* Маємо наступну задачу:

$$\Delta u(\rho, \varphi) \equiv u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \alpha; \quad (14.1)$$

$$u(R, \varphi) = A \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha; \quad (14.2)$$

$$u_{\varphi}(\rho, 0) = 0, \quad u_{\varphi}(\rho, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq R. \quad (14.3)$$

Крайові умови узгоджені, тому для знаходження розв'язку однорідного рівняння (14.1) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Отже, шукаємо  $u(\rho, \varphi)$  у вигляді

$$u(\rho, \varphi) = X(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0.$$

Відокремивши змінні у рівнянні (14.1) та у крайових умовах (14.3), одержимо:

$$\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho) + \lambda X(\rho) = 0; \quad (14.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi''(\varphi) - \lambda \Phi(\varphi) &= 0; \\ \Phi'(0) &= 0, \quad \Phi'(\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Із задачі (14.5) маємо:

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2, \quad \Phi_n(\varphi) = \cos \frac{\pi n}{\alpha} \varphi, \quad n = \overline{0, \infty}$$

(нуль теж є власним значенням). Підставимо знайдені  $\lambda_n$  у (14.4) і визначимо  $X_n(\rho)$ , врахувавши умову визначеності розв'язку в нулі. Одержимо:

$$X_n(\rho) = B_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}}, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Таким чином, розв'язок рівняння Лапласа (15) матиме вигляд

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos \frac{\pi n}{\alpha} \varphi. \quad (14.6)$$

Сталі  $B_n$  визначаємо підстановкою ряду (14.6) у крайову умову (14.2).

Маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos \frac{\pi n}{\alpha} \varphi = A \cos \frac{\pi n}{\alpha} \varphi.$$

Звідси

$$B_n = \begin{cases} AR^{-\frac{\pi}{\alpha}}, & n=1; \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Отже, розв'язком задачі (14.1)-(14.3) буде функція

$$u(\rho, \varphi) = A \left( \frac{\rho}{R} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi \cdot \frac{\pi}{3}$$



*Зауваження.* Рівняння Ейлера (14.4) інтегрується зведенням до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної  $\rho = e^t$ . У випадку однорідного рівняння Ейлера можна застосовувати і простішу підстановку  $X_n(\rho) = \rho^k$ , де  $k$  – невідома стала.

**Приклад 2.** Зінтегрувати крайову задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$\begin{aligned}\Delta u(\rho, \varphi) &= 18\rho, \quad 1 < \rho < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u_\rho(1, \varphi) - u(1, \varphi) &= 1, \quad u(4, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.\end{aligned}$$

### **Фізична інтерпретація**

а) Знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму кільця, обмеженого колами  $\rho = 1$  та  $\rho = 4$ , зовнішній край якої закріплений нерухомо, а внутрішній – пружно, причому край закріплення пружини зміщений; мембрана піддається дії зовнішньої сили інтенсивності  $18\rho$ .

б) Знайти стаціонарний розподіл температури всередині однорідної пластинки, яка має форму кільця, обмеженого колами  $\rho = 1$  та  $\rho = 4$ , зовнішній край якої підтримується при нульовій температурі, якщо на внутрішньому краї проходить теплообмін із навколишнім середовищем сталої температури, а інтенсивність внутрішніх джерел тепла рівна  $18\rho$ .

*Розв'язування.*

*Перший спосіб (метод відокремлення змінних).* Спочатку для спрощення задачі зведемо рівняння до однорідного підстановкою

$$u(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + \omega(\rho, \varphi),$$

де  $V(\rho, \varphi)$  – нова невідома функція, а  $\omega(\rho, \varphi)$  – деякий частинний розв'язок рівняння

$$\Delta \omega \equiv \omega_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \omega_\rho + \frac{1}{\rho^2} \omega_{\varphi\varphi} = 18\rho.$$

Будемо шукати допоміжну функцію у вигляді  $\omega(\rho, \varphi) = A\rho^3$ , тоді з рівняння визначаємо  $A = 2$ . Отже, беремо  $U(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + 2\rho^3$  і для нової невідомої функції  $V(\rho, \varphi)$  одержуємо наступну крайову задачу:

$$\Delta V(\rho, \varphi) = 0, \quad 1 < \rho < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$V_\rho(1, \varphi) - V(1, \varphi) = -3, \quad V(4, \varphi) = -128, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Застосовуючи до цієї задачі класичний метод відокремлення змінних, тобто шукаючи розв'язок у вигляді  $V(\rho, \varphi) = X(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0$ , одержимо загальний розв'язок рівняння Лапласа у вигляді

$$V(\rho, \varphi) = A_0 \ln \rho + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos n\varphi + (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin n\varphi \right] \quad (14.7)$$

Підставивши ряд (14.7) у крайові умови для  $V(\rho, \varphi)$ , одержимо:

$$A_0 - B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n(n-1) + B_n(n-1)) \cos n\varphi + (C_n(n-1) + D_n(n-1)) \sin n\varphi] = -3;$$

$$A_0 \ln 4 + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \cdot 4^n + B_n \cdot 4^{-n}) \cos n\varphi + (C_n \cdot 4^n + D_n \cdot 4^{-n}) \sin n\varphi] = -128.$$

Звідси

$$A_n = B_n = C_n = D_n = 0, \quad n > 0;$$

$$A_0 - B_0 = -3, \quad A_0 \ln 4 + B_0 = -128.$$

Із останньої системи  $A_0 = -131(1 + \ln 4)^{-1}$ ,  $B_0 = (3 \ln 4 - 128)(1 + \ln 4)^{-1}$ ;  
отже,

$$u(\rho, \varphi) = 2\rho^3 + \frac{3 \ln 4 - 128 - 131 \ln \rho}{\ln 4 + 1}. \quad (14.8)$$

*Другий спосіб (метод спуску).* Оскільки вільний член у рівнянні Пуассона і крайові умови не залежать від полярного кута, то можна покласти  $u(\rho, \varphi) \equiv u(\rho)$ . Тоді для визначення розв'язку матимемо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння:

$$u''(\rho) + \frac{1}{\rho} u'(\rho) = 18\rho, \quad 1 < \rho < 4;$$

$$u'(1) - u(1) = 1, \quad u(4) = 0.$$

Зінтегрувавши рівняння за допомогою підстановки  $u'(\rho) = Z(\rho)$  або шляхом виділення повної похідної, одержимо загальний розв'язок

$$u(\rho) = 2\rho^3 + C_1 \ln \rho + C_2.$$

Визначивши сталі  $C_1, C_2$  з крайових умов, дістанемо розв'язок крайової задачі у вигляді (14.8).

**Приклад 3.** Побудувати розв'язок крайової задачі:

$$\begin{aligned}\Delta u(\rho, \varphi) &= 4\rho^{-2}(\sin^2 2\varphi - \cos \varphi), \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; \\ u_\rho(1, \varphi) &= 0, \quad u_\rho(2, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \\ u(\rho, 0) &= 4, \quad u(\rho, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad 1 \leq \rho \leq 2.\end{aligned}$$

*Розв'язування.* Якщо проводити аналогію зі змішаними задачами для рівнянь параболічного типу, то можна було б сказати, що маємо задачу типу 3 (крайові умови на прямолінійних краях заданого кільцевого сектора неоднорідні). Тому й етапи знаходження розв'язку в цих задачах аналогічні.

*Перший етап.* Зводимо до однорідних крайові умови на прямолінійних краях підстановкою  $u(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + \omega(\rho, \varphi)$ , де  $V(\rho, \varphi)$  – нова невідома функція, а  $\omega(\rho, \varphi)$  – допоміжна функція, котра повинна справджувати крайові умови

$$\omega(\rho, 0) = 4, \quad \omega(\rho, \frac{\pi}{2}) = 0.$$

Будемо шукати допоміжну функцію  $\omega(\rho, \varphi)$  в періодичному вигляді

$$\omega(\rho, \varphi) = A(\rho)\sin \beta\varphi + B(\rho)\cos \beta\varphi,$$

де невідомі функції  $A(\rho)$ ,  $B(\rho)$  та стала  $\beta$  визначаються з крайових умов:

$$\begin{aligned}\omega(\rho, 0) &\equiv A(\rho) \cdot 0 + B(\rho) \cdot 1 = 4 \Rightarrow B(\rho) = 4; \\ \omega(\rho, \frac{\pi}{2}) &\equiv A(\rho)\sin \frac{\beta\pi}{2} + B(\rho)\cos \frac{\beta\pi}{2} = 0.\end{aligned}$$

Остання умова виконується, наприклад, при  $A(\rho) \equiv 0$ ,  $\beta = 1$ . Отже, беремо  $\omega(\rho, \varphi) = 4\cos \varphi$ . Тоді  $u(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + 4\cos \varphi$ , а для  $V(\rho, \varphi)$  матимемо наступну крайову задачу:

$$\begin{aligned}\Delta V(\rho, \varphi) &\equiv V_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}V_\rho + \frac{1}{\rho^2}V_{\varphi\varphi} = 4\rho^{-2}\sin^2 2\varphi, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; \\ V_\rho(1, \varphi) &= 0, \quad V_\rho(2, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \\ V(\rho, 0) &= 0, \quad V(\rho, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad 1 \leq \rho \leq 2.\end{aligned}$$

*Другий етап.* Шукаємо власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі. Поклавши  $V(\rho, \varphi) = Q(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0$  і відокремивши змінні у відповідному однорідному рівнянні та у крайових умовах на прямолінійних краях, одержимо задачу Штурма-Ліувілля

$$\begin{aligned}\Phi''(\varphi) - \lambda \Phi(\varphi) &= 0; \\ \Phi(0) &= 0, \quad \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\end{aligned}$$

звідки  $\Phi_n(\varphi) = \sin 2n\varphi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Третій етап.* Розв'язок неоднорідної задачі шукаємо у вигляді ряду по знайдених власних функціях:

$$V(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\rho) \cdot \Phi_n(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\rho) \sin 2n\varphi.$$

Невідомі коефіцієнти  $X_n(\rho)$  знаходимо підстановкою цього ряду в неоднорідне рівняння та у крайові умови на дугах. Одержимо:

$$\begin{aligned}\rho^2 X_n''(\rho) + \rho X_n'(\rho) - 4n^2 X_n(\rho) &= f_n; \\ X_n'(1) &= 0, \quad X_n'(2) = 0,\end{aligned} \tag{14.9}$$

де коефіцієнт Фур'є

$$f_n = \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \sin 2n\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k \neq 1; \\ 4\pi^{-1}, & n = 2; \\ \frac{32}{\pi n(4 - n^2)}, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Ввівши підстановку  $\rho = e^t$  у рівняння Ейлера (14.9) і зінтегрувавши його, будемо мати:

$$X_n(\rho) = A_n \rho^{2n} + B_n \rho^{-2n} - 0,25n^{-2} f_n.$$

Із крайових умов  $A_n = B_n = 0$ , отже,

$$u(\rho, \varphi) \equiv u(\varphi) = 4 \cos \varphi - \frac{1}{4\pi} \sin 4\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi (2k-1)^3 \left[ 4 - (2k-1)^2 \right]} \sin(4k-2)\varphi.$$

**Завдання.** Розв'язати крайову задачу прикладу 3, використовуючи метод спуску (див. приклад 2).

**Приклад 4.** Знайти положення рівноваги однорідної мембрани, яка має форму кільця, обмеженого колами  $\rho = a$  та  $\rho = b$  ( $0 < a < b$ ), внутрішній край якої жорстко закріплений, а зовнішній вільний, якщо мембрана піддається дії зовнішньої сили інтенсивності  $12(x^2 - y^2)$ . Початок координат знаходиться у центрі кільця.

*Розв'язування.* Математична модель задачі (у полярній системі координат):

$$\Delta u(\rho, \varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 12\rho^2 \cos 2\varphi, \quad a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$u(a, \varphi) = 0, \quad u_{\rho}(b, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді  $u(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + \omega(\rho, \varphi)$ , де  $V(\rho, \varphi)$  – нова невідома функція, а  $\omega(\rho, \varphi)$  – деякий розв'язок заданого рівняння Пуассона. Зокрема, в даному випадку  $\omega(\rho, \varphi)$  можна шукати у вигляді  $\omega(\rho, \varphi) = A\rho^4 \cos 2\varphi$ , тоді з рівняння визначаємо  $A = 1$ . Отже,

$$\omega(\rho, \varphi) = \rho^4 \cos 2\varphi.$$

Тоді для  $V(\rho, \varphi)$  одержуємо крайову задачу (зادля зручності домножимо рівняння на  $\rho^2$ ):

$$\rho^2 V_{\rho\rho} + \rho V_{\rho} + V_{\varphi\varphi} = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$V(a, \varphi) = -a^4 \cos 2\varphi, \quad V_{\rho}(b, \varphi) = -4b^3 \cos 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Застосовуючи до цієї задачі класичний метод відокремлення змінних, тобто шукаючи розв'язок у вигляді  $V(\rho, \varphi) = X(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0$ , одержимо загальний розв'язок рівняння Лапласа у вигляді (див. приклад 2):

$$V(\rho, \varphi) = A_0 \ln \rho + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos n\varphi + (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin n\varphi \right]$$

Коефіцієнти ряду слід визначати підстановкою ряду в крайові умови на колах, подаючи при цьому праві частини рівностей у вигляді ряду Фур'є. Проте в даному випадку функції крайових умов уже подані у вигляді розкладу в ряд Фур'є (резонансний випадок). Тому, одразу прирівнявши коефіцієнти при

однакових власних функціях, одержимо:  $A_0 = B_0 = 0$ ;  $C_n = D_n = 0$  для всіх  $n$ ; а  $A_n = B_n = 0$  для всіх  $n$ , окрім  $n=2$ . При  $n=2$  матимемо систему для визначення  $A_2$  та  $B_2$ :

$$\begin{cases} A_2 a^4 + B_2 = -a^6; \\ A_2 b^4 - B_2 = -2b^6 \end{cases} \Rightarrow A_2 = -\frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4}, \quad B_2 = \frac{2b^6 - a^6}{a^4 + b^4}.$$

Отже, шуканий розв'язок крайової задачі запишеться у вигляді:

$$u(\rho, \varphi) = \rho^4 \cos 2\varphi + \left[ (2b^2 - a^2) a^4 b^4 \rho^{-2} - (a^6 + 2b^6) \rho^2 \right] \frac{\cos 2\varphi}{a^4 + b^4}.$$

**Інтеграл Пуассона.** Розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в крузі радіуса  $R$  із центром у початку координат

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$u(R, \varphi) = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

дається інтегралом Пуассона

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi.$$

Для відповідної зовнішньої задачі ( $R \leq \rho < +\infty$ )

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - R^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi.$$

Вираз

$$K(\rho, \varphi, R, \psi) = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)}$$

називається ядром Пуассона.

## 14.2. Задача Неймана

Умова стаціонарності теплового поля у випадку задачі Неймана для рівняння Лапласа в кругових областях має вигляд:

а) для внутрішності ( $0 \leq \rho \leq R$ ) або зовнішності ( $R \leq \rho < +\infty$ ) круга

$$\begin{aligned} \Delta u(\rho, \varphi) &= 0; \\ u_\rho(R, \varphi) &= f(\varphi) \end{aligned} \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$$

Для кругового сектора ( $0 \leq \rho \leq R$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha < 2\pi$ ), якщо крайові умови на прямолінійних краях однорідні, буде  $\int_0^\alpha f(\varphi) d\varphi = 0$ .

б) для кільця ( $a \leq \rho \leq b$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ )

$$\begin{aligned} \Delta u(\rho, \varphi) &= 0; \\ u_\rho(a, \varphi) &= f_1(\varphi); \\ u_\rho(b, \varphi) &= f_2(\varphi) \end{aligned} \Rightarrow a \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi = b \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi.$$

Для криволінійного прямокутника чи кільцевого сектора ( $a \leq \rho \leq b$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha < 2\pi$ ), якщо крайові умови на прямолінійних краях однорідні, буде

$$a \int_0^\alpha f_1(\varphi) d\varphi = b \int_0^\alpha f_2(\varphi) d\varphi.$$

Якщо наведені вище умови виконуються, то задача Неймана буде мати розв'язок, який визначається з точністю до сталого доданка. Якщо ж рівняння неоднорідне або ж при  $0 \leq \varphi \leq \alpha < 2\pi$  маємо неоднорідні крайові умови на прямолінійних краях, то можна спробувати звести задачу до однорідної з урахуванням умов узгодженості аналогічно до прямокутних областей (див. приклад 6 теми 13).

### ***Завдання для самоконтролю***

1. Як будується розв'язок крайових задач для рівняння Лапласа: а) у крузі; б) в кільці; в) у круговому секторі?

2. При яких значеннях сталої  $A$  будуть коректно поставленими задачі Неймана:

а)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ;

$$u_x(0, y) = A, \quad u_x(a, y) = y^3 - 1,5by^2, \quad 0 \leq y \leq b;$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a;$$

б)  $\Delta u(\rho, \varphi) = 0$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ;

$$u_\rho(1, \varphi) = A + 4\sin^2 \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

3. Як будуються розв'язки крайових задач для рівняння Пуассона в кругових областях?

### *Індивідуальні завдання*

**Завдання 1.** Дати фізичну інтерпретацію кожної крайової задачі та зінтегрувати одну (на вибір студента).

$$1. \Delta u(\rho, \varphi) = \rho, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$u(a, \varphi) \equiv C = \text{const}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

$$2. \Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 < \varphi < \pi/2;$$

$$u(1, \varphi) = 0, \quad u(2, \varphi) = \cos 2\varphi + 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2;$$

$$u_\rho(\rho, 0) = u(\rho, \pi/2) = 0, \quad 1 \leq \rho \leq 2.$$

$$3. \Delta u(\rho, \varphi) = -\frac{15}{4} \sin \frac{3\varphi}{2}, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \varphi < \pi;$$

$$u(1, \varphi) = \sin \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi;$$

$$u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, \pi) = \rho^2, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

$$4. \Delta u(\rho, \varphi) = A\varphi \cos 2\varphi, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \varphi < \pi/4;$$

$$u(1, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4;$$

$$u(\rho, 0) = u(\rho, \pi/4) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (A = \text{const}).$$

$$5. \Delta u(\rho, \varphi) = 2, \quad a < \rho < b, \quad 0 < \varphi < \pi/2;$$

$$u_\rho(a, \varphi) = a, \quad u_\rho(b, \varphi) = 2 \cos 2\varphi + b, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2;$$

$$u_\varphi(\rho, 0) = u_\varphi(\rho, \pi/2) = 0, \quad a \leq \rho \leq b.$$

$$6. \Delta u(\rho, \varphi) = -5C \cos 3\varphi, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 < \varphi < \pi/6;$$

$$u(1, \varphi) = C(\cos 3\varphi + 2 \cos 6\varphi), \quad u_\rho(2, \varphi) = 4C \cos 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6;$$

$$u_\varphi(\rho, 0) = 0, \quad u_\varphi(\rho, \pi/6) = -3C\rho^2, \quad a \leq \rho \leq b \quad (C = \text{const}).$$



## Тема 15. Теорія потенціалу. Застосування математичних моделей для практичних задач на поліграфічному виробництві

### 15.1. Основні види потенціалів, їх властивості

Нехай у деякій точці  $A(a,b,c)$  тривимірного простору розміщений електричний заряд  $q$ . На підставі закону Кулона можна показати, що точковий заряд величини  $q$  в довільній точці  $M(x,y,z)$  простору створює потенціал

$$U(M) = \frac{q}{r_{AM}} = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Легко бачити, що  $U(M) \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow \infty$  (чим далі від джерела, тим слабша дія заряду).

Оскільки при наявності кількох точкових зарядів створювані ними потенціали додаються, то загальний потенціал, створений рівномірно розподіленим зарядом, знаходиться як границя суми, тобто у вигляді інтеграла.

Розглянемо основні види потенціалів та їх властивості.

1. **Об'ємний потенціал.** Потенціал, створений зарядом, який розподілений на об'ємі  $D$  тривимірного простору з об'ємною густиною  $f(M)$ , рівний

$$V(M) = \iiint_D \frac{f(P)}{r_{PM}} dP.$$

Тут  $P(\xi,\eta,\zeta)$  – довільна (змінна) точка об'єму  $D$ ,  $M(x,y,z)$  – деяка (фіксована) точка тривимірного простору.

Потенціал об'єму є гармонічною функцією зовні області  $D$ , тобто для  $M \notin D$  справджує рівняння Лапласа  $\Delta V(M) = 0$ .

**Теорема 1.** Якщо об'ємна густина  $f(M)$  є обмеженою й інтегрованою в області  $D$  функцією, то потенціал об'єму  $V(M)$  і його частинні похідні першого порядку є неперервними у всьому просторі, причому ці похідні можуть бути одержані шляхом диференціювання під знаком інтеграла.

**Теорема 2.** Якщо об'ємна густина  $f(M) \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ , то потенціал об'єму  $V(M)$  має неперервні похідні другого порядку в області  $D$  і при  $M \in D$  справджує рівняння Пуассона  $\Delta V(M) = -4\pi f(M)$ .

**Наслідок.** Якщо об'ємна густина  $f(M)$  справджує умови теореми 2, то рівняння  $\Delta V(M) = -f(M)$  має частинний розв'язок

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{f(P)}{r_{PM}} dP.$$

**2. Потенціал простого шару.** Якщо заряд розподілений по поверхні  $S$  із поверхневою густиною  $\psi(M)$ , то потенціал, створюваний цим зарядом, рівний

$$U(M) = \iint_S \frac{\psi(P)}{r_{PM}} ds,$$

де  $P(\xi, \eta, \zeta)$  – довільна (змінна) точка на поверхні  $S$ ,  $M=M(x, y, z)$  – деяка (фіксована) точка тривимірного простору.

У всіх точках  $M(x, y, z)$  простору, які не належать поверхні  $S$ , потенціал простого шару має похідні всіх порядків і справджує рівняння Лапласа, причому  $U(M) \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow \infty$ .

**Теорема 3.** Потенціал простого шару з неперервною густиною є неперервною функцією у всьому просторі.

Похідна за напрямом  $\vec{n}_0$  зовнішньої нормалі до поверхні  $S$  у фіксованій точці  $P_0 \in S$  дається формулою

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{n}_0} = \iint_S \psi(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} \left( \frac{1}{r_{PM}} \right) ds = \iint_S \psi(P) \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{n}_0)}{r_{PM}} ds, \quad (15.1)$$

Позначимо  $\left( \frac{\partial U(M)}{\partial \vec{n}_0} \right)_i$  і  $\left( \frac{\partial U(M)}{\partial \vec{n}_0} \right)_e$  границі похідної за напрямом вектора  $\vec{n}_0$ ,

коли  $M \rightarrow P_0$ , відповідно зсередини та ззовні поверхні  $S$ . Тоді мають місце формули:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i &= \iint_S \psi(P) \frac{\cos(\vec{P_0P}, \vec{n}_0)}{r_{PP_0}} ds + 2\pi\psi(P_0); \\ \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e &= \iint_S \psi(P) \frac{\cos(\vec{P_0P}, \vec{n}_0)}{r_{PP_0}} ds - 2\pi\psi(P_0).\end{aligned}\quad (15.2)$$

Отже, у точках поверхні похідна за напрямком вектора нормалі потенціалу простого шару має скачок:

$$\left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e = 4\pi\psi(P_0). \quad (15.3)$$

*Зауваження.* У випадку площини, якщо заряд розподілений по деякій замкнутій кривій  $l$  із лінійною густиною  $\psi(M)$ , одержимо *логарифмічний потенціал простого шару*:

$$U(M) = \int_l \psi(P) \ln \frac{1}{r_{PM}} dl,$$

де  $P(\xi, \eta)$  – довільна (змінна) точка на кривій  $l$ ,  $M(x, y)$  – деяка (фіксована) точка площини.

Формули (15.1)-(15.3) для логарифмічного потенціалу простого шару матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{n}_0} &= \int_\ell \psi(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} \left( \ln \frac{1}{r_{PM}} \right) d\ell = \int_\ell \psi(P) \frac{\cos(\vec{MP}, \vec{n}_0)}{r_{PM}} d\ell; \\ \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i &= \int_\ell \psi(P) \frac{\cos(\vec{P_0P}, \vec{n}_0)}{r_{PP_0}} d\ell + \pi\psi(P_0); \\ \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e &= \int_\ell \psi(P) \frac{\cos(\vec{P_0P}, \vec{n}_0)}{r_{PP_0}} d\ell - \pi\psi(P_0); \\ \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e &= 2\pi\psi(P_0),\end{aligned}$$

де  $P_0$  – деяка фіксована точка кривої  $l$ .

За допомогою потенціалів простого шару будуються розв'язки задач Неймана (друга крайова задача) для рівняння Лапласа.

**3. Потенціал подвійного шару.** Нехай  $S$  – орієнтована поверхня (тобто на ній вказані внутрішня та зовнішня сторони), по якій розподілений диполь із густиною моментів  $\mu(M)$ , причому в кожній точці напрям осі диполя співпадає з напрямом внутрішньої нормалі  $\vec{n}_i$  до поверхні  $S$  у точці  $P$ .

Потенціал, створюваний диполем, рівний

$$W(M) = \iint_S \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \vec{n}_i)}{r_{PM}^2} ds. \quad (15.4)$$

Формулу потенціалу подвійного шару (15.4) можна записати в іншому вигляді

$$W(M) = \iint_S \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{r_{PM}^2} ds.$$

Тут  $M(x, y, z)$  – фіксована точка простору;  $\vec{n}$  – напрям зовнішньої нормалі до поверхні  $S$  у точці  $P$ .

При  $M \notin S$  потенціал подвійного шару має похідні усіх порядків і справджує рівняння Лапласа, причому  $W(M) \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow \infty$ .

**Теорема 4.** Потенціал подвійного шару (15.4) має границі при прямуванні точки  $M$  до фіксованої точки  $P_0 \in S$  ззовні або зсередини. Якщо границю значень  $W(M)$  ззовні позначити через  $W_e(P_0)$ , а границю зсередини – через  $W_i(P_0)$ , то мають місце формули:

$$W_i(P_0) = \iint_S \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{r_{PP_0}^2} ds + 2\pi\mu(P_0) = W(P_0) + 2\pi\mu(P_0); \quad (15.5)$$

$$W_e(P_0) = \iint_S \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{r_{PP_0}^2} ds - 2\pi\mu(P_0) = W(P_0) - 2\pi\mu(P_0), \quad (15.6)$$

тобто величина скачка функції  $W(M)$  у довільній точці  $P_0 \in S$  буде

$$W_i(P_0) - W_e(P_0) = 4\pi\mu(P_0). \quad (15.7)$$

Інтеграл  $W(P_0)$  називається прямим значенням потенціалу подвійного шару в точці  $P_0 \in S$ .

*Зауваження.* У випадку площини, якщо диполь розподілений по деякій замкнутій орієнтованій кривій  $\ell$  з густиною моментів  $\mu(M)$ , одержимо **логарифмічний потенціал подвійного шару:**

$$W(M) = \int_{\ell} \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{r_{PM}} d\ell,$$

де  $P(\xi, \eta)$  – довільна (змінна) точка на кривій  $l$ ,  $M(x, y)$  – деяка (фіксована) точка площини.

Формули (15.4)-(15.7) для логарифмічного потенціалу подвійного шару матимуть вигляд:

$$W_i(P_0) = \int_{\ell} \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{r_{PP_0}} d\ell + \pi\mu(P_0);$$

$$W_e(P_0) = \int_{\ell} \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{r_{PP_0}} d\ell - \pi\mu(P_0);$$

$$W_i(P_0) - W_e(P_0) = 2\pi\mu(P_0).$$

## 15.2. Задача Діріхле для рівняння Лапласа

За допомогою потенціалів подвійного шару будуються розв'язки задач Діріхле (перша крайова задача) для рівняння Лапласа.

**Приклад 1.** Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка  $0 \leq x \leq 1$  зі сталою густиною заряду  $\psi(M) = q_0$ .

*Розв'язування.* Згідно визначення логарифмічний потенціал простого шару задається формулою

$$U(M) = \int_{\ell} \psi(P) \ln \frac{1}{r_{PM}} dl.$$

Тут:  $l$  – відрізок  $0 \leq x \leq 1$ ;  $M(x, y)$  – фіксована точка площини;  $P(\xi, 0)$  – точка відрізка  $l$ ;  $r_{PM} = |MP| = \sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}$ . Отже,

$$U(x, y) = q_0 \int_0^1 \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}} d\xi = -0,5q_0 \int_0^1 \ln [(\xi - x)^2 + y^2] d\xi =$$

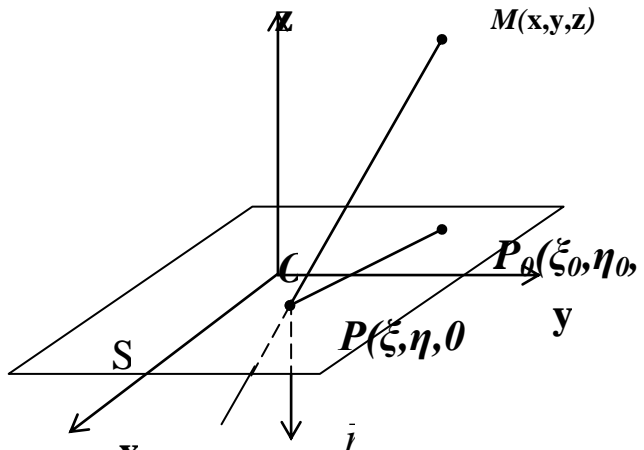
$$\begin{aligned}
&= -0,5q_0 \ln[(1-x)^2 + y^2] + q_0 \int_0^1 \frac{[(\xi-x)^2 + y^2] + x(\xi-x) - y^2}{(\xi-x)^2 + y^2} d\xi = \\
&= q_0 \left\{ 1 + (x-1) \ln \sqrt{(1-x)^2 + y^2} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} - y \left( \operatorname{arctg} \frac{1-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

**Приклад 2.** Користуючись поверхневими потенціалами, знайти розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа у півпросторі:

$$\begin{aligned}
U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} &= 0, \quad z > 0; \\
U(x, y, 0) &= f(x, y).
\end{aligned}$$

*Розв'язування.* Розв'язок першої крайової задачі для рівняння Лапласа шукається у вигляді потенціалу подвійного шару:

$$U(x, y, z) \equiv W(M) = \iint_S \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{r_{PM}^2} ds.$$



Для даного прикладу:

$S$  – площина  $XOY$ ;  $M(x, y, z)$  – фіксована точка простору;  $P(\xi, \eta, 0)$  – точка площини  $XOY$ ;  $r_{PM} = |PM| = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}$ ;  $\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{n}) = \frac{z}{r_{PM}}$ .

Зауважимо, що зовнішня нормаль  $\vec{n}$  до площини  $XOY$  в точці  $P$  напрямлена протилежно до осі  $Oz$ , оскільки  $z > 0$  – “внутрішня” сторона площини. Отже, будемо мати

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi, \eta) \frac{z}{r_{PM}^3} d\xi d\eta. \quad (15.8)$$

Невідому густину моментів  $\mu(\xi, \eta)$  визначаємо із властивості скачка потенціалу подвійного шару (15.5):

$$W_i(P_0) = \iint_S \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{r_{PP_0}^2} ds + 2\pi\mu(P_0), \quad P_0 \in S.$$

Звідси, враховуючи, що  $W_i(P_0) = f(P_0)$ , а  $\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}) = 0$  (нормаль  $\vec{n}$  перпендикулярна до площини  $XOY$ ), одержимо  $f(P_0) = 2\pi\mu(P_0)$ , тобто для довільної точки  $P \in S$   $\mu(P) = \frac{f(P)}{2\pi}$ . Тоді згідно формули (15.8)

$$U(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta.$$

### **Завдання для самоконтролю**

1. Запишіть інтеграл для обчислення:

- а) об'ємного потенціалу;
- б) потенціалів простого та подвійного шару;
- в) логарифмічних потенціалів простого та подвійного шару.

2. Сформулюйте основні властивості:

- а) об'ємного потенціалу;
- б) потенціалу простого шару;
- в) потенціалу подвійного шару.

3. Які крайові задачі для рівнянь еліптичного типу можна розв'язувати за допомогою потенціалів?

### **Індивідуальні завдання**

**Завдання 1.** Знайти об'ємний потенціал  $V(M)$  кулі радіуса  $R$  з центром початку координат при сталій густині заряду  $f(M) \equiv 1$ :

- а) поставивши крайову задачу для  $V(M)$  і розв'язавши її;
- б) шляхом прямого обчислення об'ємного інтеграла.

**Завдання 2.** За допомогою потенціала подвійного шару розв'язати задачу Діріхле для півплощини:

$$\begin{aligned} \Delta U(x, y) &= 0, \quad y > 0; \\ U(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

Розглянути випадок  $f(x) \equiv C = \text{const.}$

**Завдання 3.** Користуючись потенціалом простого шару, знайти розв'язок задачі Неймана для круга одиничного радіуса з центром у початку координат:

$$\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U_\rho(1, \varphi) \equiv C = \text{const}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

**Завдання 4.** Ознайомитись із деякими застосуваннями рівнянь математичної фізики, побудовою математичних моделей фізичних процесів. За [10] відомий ряд наукових праць, в яких висвітлено практичне та наукове обґрунтування фізичних явищ [18]– [28], [30], [32], [33].

1. Математична модель динаміки росту парової фази (перенесення теплоти в рідині, зміна зовнішнього тиску, вплив теплофізичних параметрів, поля швидкостей і тиску біля бульбашки).

2. Теоретичні питання надійності електротехнічних комутуючих пристроїв поліграфічних машин.

3. До питання про розвиток трафаретної печатної техніки.

4. Визначення поля тиску в зазорі торцевого газозатвірного ущільнення імпульсного типу.

5. Розподіл температури в середовищі з нелінійною поведінкою матеріалу.

6. Енергетичні функції в задачах масштабування з врахуванням вмісту растрових зображень.

**Завдання 5.** Розглянути фізичний процес на виробництві, побудувати математичну модель та розв'язати поставлену задачу (бажано за тематикою магістерської роботи).



## Розділ III

### Елементи математичної статистики

*Математичною статистикою* називається наука [12], яка займається розробкою методів відбору, опису і аналізу дослідних даних з метою вивчення закономірностей випадкових масових явищ.

В свою чергу, встановлення цих закономірностей базується на вивченні методами теорії ймовірностей статистичних даних – результатів дослідів або спостережень.

Отже, математична статистика вивчає методи, які дають змогу за результатами випробувань робити певні ймовірнісні висновки.

Основні задачі математичної статистики:

- 1) вказати способи збору та групування (якщо даних дуже багато) статистичної інформації;
- 2) визначити закон розподілу випадкової величини або системи випадкових величин за статистичними даними;
- 3) визначити невідомі параметри розподілу;
- 4) перевірити правдоподібність припущень про закон розподілу випадкової величини, про форму зв'язку між випадковими величинами або про значення параметра, який оцінюють.

Методи математичної статистики ефективно використовують при розв'язуванні багатьох задач науки, організації технологічного процесу, планування, управління та ціноутворення.

#### **Тема 16. Кореляційний зв'язок між досліджуваними величинами**

##### **16.1. Кореляційний аналіз, опрацювання даних**

В багатьох прикладних задачах необхідно виявити залежність між двома властивостями (ознаками)  $X$  і  $Y$  одного і того ж економічного об'єкту, або між певними ознаками різних об'єктів. Якщо вказані ознаки допускають кількісне

вимірювання, і, з погляду економічної теорії, виходячи з економічної характеристики об'єкту, ознака  $Y$  залежить від ознаки  $X$ , тоді  $X$  можна назвати незалежною змінною, або факторною ознакою, або просто фактором, а  $Y$  – залежною змінною або результативною ознакою.

Якщо кожному значенню факторної ознаки  $X$  відповідає одне і тільки одне значення результативної ознаки  $Y$ , то говорять, що між цими ознаками існує функціональний зв'язок:  $Y = f(X)$ . Якщо кожному значенню факторної ознаки  $X$  відповідає безліч значень результативної ознаки  $Y$ , то між цими ознаками існує статистичний зв'язок.

Вивчення статистичного зв'язку дуже складний і трудомісткий процес, у якому потрібно аналізувати багатомірні таблиці даних. Тому зазвичай вивчається не статистичний, а кореляційний зв'язок між  $X$  та  $Y$ . Якщо кожному значенню факторної ознаки  $X$  відповідає певне середнє значення результативної ознаки  $Y$ , то між цими ознаками існує кореляційний зв'язок, тобто кореляційною є функціональна залежність між значеннями  $X$  і середніми значеннями  $Y$ :  $\bar{Y} = f(X)$ .

Наприклад, відомо, що з однакових за площею ділянок землі при рівних кількостях внесеного добриву отримують різний урожай. Тому, якщо  $Y$  – урожайність зерна, а  $X$  – кількість внесеного добрива, то функціонального зв'язку між  $X$  та  $Y$  немає. Це пояснюється впливом таких випадкових факторів, як температура повітря, кількість опадів і т. ін. Однак досвід показує, що середній урожай є функцією від кількості добрива, тобто між  $X$  та  $Y$  існує кореляційний зв'язок.

Основними задачами кореляційного аналізу є:

- вивчення сили зв'язку між двома і більше ознаками досліджуваного об'єкту;
- встановлення факторів, що найбільш суттєво впливають на результативну ознаку;
- виявлення невідомих причинно-наслідкових зв'язків між ознаками об'єкту.

### Групування даних для кореляційного аналізу

Вибіркові дані для вивчення кореляційного зв'язку між ознаками  $X$  та  $Y$  мають вигляд пар їх значень:  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ ,  $x_i$  – значення величини  $X$ ,  $y_i$  – значення  $Y$ ,  $n$  – кількість пар значень,  $i = \overline{1, n}$ .

Якщо кількість пар значень достатньо велика (принаймні,  $n > 20$ ), то для зручності розрахунків дані групуються.

Для групування даних необхідно:

1) Розбити множини значень  $X$  та  $Y$  на інтервали, їх кількість для  $X$  та  $Y$  може бути різною (позначення:  $k$  – кількість інтервалів для  $X$ ;  $m$  – кількість інтервалів для  $Y$ ).

2) Зобразити дані графічно: побудувати на площині точки з координатами  $(x_i; y_j)$ . В результаті отримується площа, розбита на прямокутники, в кожному з яких може бути множина точок (рис. 9.5). Вказане графічне зображення вибірових даних називається полем кореляції.

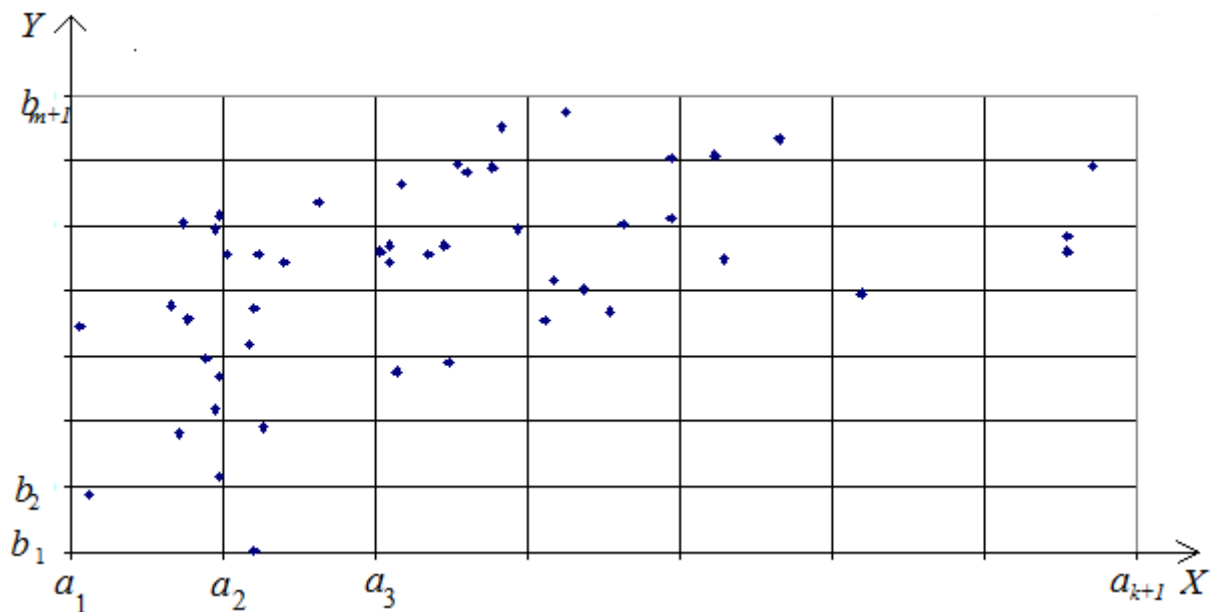


Рис.16.1. Поле кореляції.

3) Побудувати кореляційну таблицю (табл.9.3). В першому рядку, розбитому на дві частини, записуються інтервали  $[a_i; a_{i+1})$  для  $X$  та їх середини  $x_i$ . У першому стовпчику, розбитому на дві частини, записуються інтервали  $[b_j; b_{j+1})$  для  $Y$  та їх середини  $y_j$ . В центральній частині таблиці записуються

частоти  $n_{ij}$  – кількість точок, що потратили в прямокутник, обмежений по осі  $X$  інтервалом  $[a_i; a_{i+1})$  і по осі  $Y$  інтервалом  $[b_j; b_{j+1})$ . В останньому рядку таблиці записуються частоти  $n_i$  для  $X$  – кількість точок, що потратили в прямокутники, які відповідають інтервалу  $[a_i; a_{i+1})$ , тобто  $n_i = \sum_{j=1}^m n_{ij}$  – сума частот  $n_{ij}$  в стовпчики з номером  $i$ . В останньому стовпчику таблиці записуються частоти  $n_j$  для  $Y$  – кількість точок, що потратили в прямокутники, які відповідають інтервалу  $[b_j; b_{j+1})$ , тобто  $n_j = \sum_{i=1}^k n_{ij}$  – сума частот  $n_{ij}$  в рядку з номером  $j$ .

Кореляційну таблицю можна розглядати як своєрідний подвійний статистичний ряд.

$X$ (інтервали і їх середини) $Y$ (інтервали і їх середини)		$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$	$n_j = \sum_{i=1}^k n_{ij}$
		$x_1$	$x_2$	...	$x_k$	
$[b_1; b_2)$	$y_1$	$n_{11}$	$n_{21}$	...	$n_{k1}$	$n_1$
$[b_2; b_3)$	$y_2$	$n_{12}$	$n_{22}$	...	$n_{k2}$	$n_2$
...	...	...	...	...	...	...
$[b_m; b_{m+1})$	$y_m$	$n_{1m}$	$n_{2m}$	...	$n_{km}$	$n_m$
$n_i = \sum_{j=1}^m n_{ij}$		$n_1$	$n_2$	...	$n_k$	

4) За даними кореляційної таблиці будується ряд, що відображає залежність середнього значення  $Y$  від  $X$  (табл.9.4). В першому рядку таблиці записуються середини інтервалів  $x_i$ , в другому – відповідні середні значення

$$\bar{y}_{x_i}, \text{ що знаходяться за формулами: } \bar{y}_{x_1} = \frac{y_1 n_{11} + y_2 n_{12} + \dots + y_m n_{1m}}{n_1}; \bar{y}_{x_2} =$$

$$\frac{y_1 n_{21} + y_2 n_{22} + \dots + y_m n_{2m}}{n_2}; \dots \bar{y}_{x_k} = \frac{y_1 n_{k1} + y_2 n_{k2} + \dots + y_m n_{km}}{n_k}.$$

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
$\bar{y}_{x_i}$	$\bar{y}_{x_1}$	$\bar{y}_{x_2}$	...	$\bar{y}_{x_k}$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	...	$n_k$

В результаті отримується статистичний ряд, що містить значення  $X$ , відповідні середні значення  $Y$  та частоти. За даними такого ряду проводиться кореляційний аналіз.

## 16.2. Коефіцієнт кореляції Пірсона

Для оцінки тісноти (або сили) зв'язку між  $X$  та  $Y$  слугує коефіцієнт кореляції. У випадку, коли між  $X$  та  $Y$  існує *лінійний зв'язок та вибіркові дані розподілені за нормальним законом*, використовується коефіцієнт кореляції Пірсона, який зветься ще *параметричним коефіцієнтом кореляції*.

Коефіцієнт кореляції Пірсона розраховується за формулою:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y}, \quad (16.1)$$

де  $\bar{x}$  – вибіркове середнє величини  $X$ ;  $\bar{y}$  – вибіркове середнє величини  $Y$ ;  $\overline{xy}$  – вибіркове середнє величини  $XY$ ;  $s_x$  – вибіркове середнє квадратичне відхилення величини  $X$ ;  $s_y$  – вибіркове середнє квадратичне відхилення величини  $Y$ .

Враховуючи формули для знаходження вибірових середніх і середніх квадратичних відхилень, а саме:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i; & \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m y_j n_j; & \overline{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i y_j n_{ij}; \\ s_x &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i \right)^2}; & s_y &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m y_j^2 n_j - \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m y_j n_j \right)^2}; \end{aligned}$$

отримують більш зручну для розрахунків формулу:

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i y_j n_{ij} - \left( \sum_{i=1}^k x_i n_i \right) \left( \sum_{j=1}^m y_j n_j \right)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - \left( \sum_{i=1}^k x_i n_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{j=1}^m y_j^2 n_j - \left( \sum_{j=1}^m y_j n_j \right)^2}}. \quad (16.2)$$

У випадку незгрупованих даних розрахункова формула суттєво спрощується:

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}. \quad (16.3)$$

### ***Властивості коефіцієнта кореляції Пірсона***

1) Коефіцієнт кореляції Пірсона приймає значення на проміжку  $[-1; 1]$ , тобто  $-1 \leq r \leq 1$ .

2) Якщо  $|r| \leq 0,5$ , то зв'язок вважається слабким; якщо  $0,5 < |r| \leq 0,7$ , то зв'язок вважається середнім;  $|r| > 0,7$ , то зв'язок вважається сильним.

3) Якщо  $r > 0$ , то зв'язок називається додатнім, тобто зі збільшенням значень  $X$  значення  $Y$  також збільшуються. Якщо  $r < 0$ , то зв'язок називається від'ємним, тобто зі збільшенням значень  $X$  значення  $Y$  зменшуються.

*Зауваження.* Слід пам'ятати, що коефіцієнт кореляції Пірсона показує силу лінійного зв'язку. Якщо між  $X$  та  $Y$  існує сильний нелінійний зв'язок, коефіцієнт кореляції Пірсона може дорівнювати нулю.

Оскільки сила зв'язку між  $X$  та  $Y$  оцінюється за вибірковими даними, то необхідна перевірка її статистичної значущості, тобто оцінка можливості розповсюдити отримані результати на всю генеральну сукупність.

Перевірка статистичної значущості коефіцієнта кореляції Пірсона здійснюється за допомогою так званої  $t$ -статистики, яка розраховується за формулою

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (16.4)$$

Розраховане значення  $t$ -статистики порівнюється з критичним значенням  $t_{крит}$  – табличне значення розподілу Стюдента (додаток , таблиця значень), яке також можна знайти за допомогою вбудованої статистичної функції Excel **СТЮДРАСПОБР** ( $\alpha$ ;  $l$ ), де  $\alpha$  – обраний дослідником рівень значущості,  $l$  – степені вільності,  $l = n - 2$ .

Якщо розраховане значення t-статистики більше критичного  $|t| > t_{\text{крит}}$ , то коефіцієнт кореляції вважається значимим на обраному рівні  $\alpha$ .

**Приклад.** За наявними даними про рівень механізації праці  $X$  (%) і продуктивності праці  $Y$  (од. продукції/год.) для 14 однотипних підприємств (табл. 1) оцінити тісноту зв'язку між  $X$  і  $Y$ . Визначити можливість розповсюдження результатів розрахунків на всі підприємства такого типу.

Таблиця 1

$X$	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
$Y$	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

**Розв'язання.** Дані таблиці є вибіркою значень  $X$  і відповідних значень  $Y$ . Оскільки кількість даних невелика ( $n=14$ ), то їх можна не групувати. Для оцінки тісноти зв'язку між  $X$  і  $Y$  розрахуємо коефіцієнт кореляції Пірсона за формулою (16.3) для незгрупованих даних. Розрахунки для зручності оформимо у вигляді таблиці (табл. 2).

Таблиця 2

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
32	20	1024	400	640
30	24	900	576	720
36	28	1296	784	1008
40	30	1600	900	1200
41	31	1681	961	1271
47	33	2209	1089	1551
56	34	3136	1156	1904
54	37	2916	1369	1998
60	38	3600	1444	2280
55	40	3025	1600	2200
61	41	3721	1681	2501
67	43	4489	1849	2881
69	45	4791	2025	3105
76	48	5779	2304	3848
Суми				
724	492	40134	18138	26907

Отже,

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{j=1}^n y_j \right)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{j=1}^n y_j^2 - \left( \sum_{j=1}^n y_j \right)^2}} = \frac{14 \cdot 26907 - 724 \cdot 492}{\sqrt{14 \cdot 40134 - 724^2} \sqrt{14 \cdot 18138 - 492^2}} =$$

$$= \frac{20490}{\sqrt{37700} \sqrt{11868}} \approx 0,969.$$

Таке ж значення отримується за допомогою вбудованої функції **КОРРЕЛ**(массив1, массив2) (рис. 16.2, 16.3).

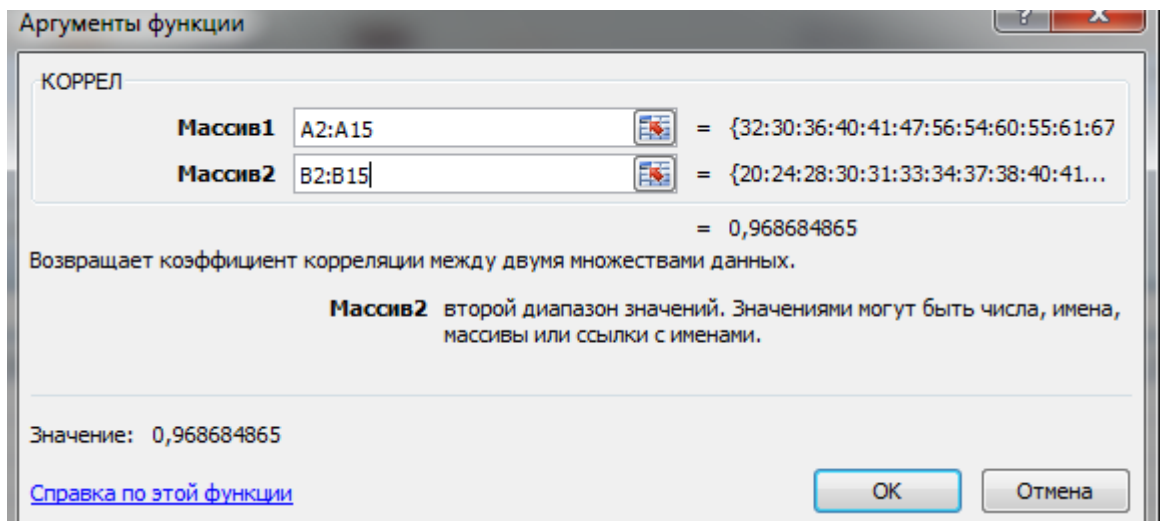


Рис. 16.2. Структура вбудованої функції **КОРРЕЛ**.

D3      fx      =КОРРЕЛ(A2:A15;B2:B15)					
	A	B	C	D	E
1	X	Y			
2	32	20	коэффициент корреляции		
3	30	24		0,968685	
4	36	28			
5	40	30			
6	41	31			
7	47	33			
8	56	34			
9	54	37			
10	60	38			
11	55	40			
12	61	41			
13	67	43			
14	69	45			
15	76	48			

Рис. 16.3. Обчислення коефіцієнт кореляції.



За значенням коефіцієнта кореляції можна зробити висновок, що між  $X$  і  $Y$  існує сильний додатній зв'язок.

Перевіримо статистичну значущість знайденого коефіцієнта кореляції Пірсона. Розрахуємо  $t$ -статистику за формулою (16.4):

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,969\sqrt{14-2}}{\sqrt{1-0,969^2}} \approx 13,59.$$

Знайдемо  $t_{\text{крит}}$ , враховуючи, що  $l = n - 2 = 14 - 2 = 12$ . Оберемо рівень значущості  $\alpha = 0,01$ . Тоді  $t_{\text{крит}} = \text{СТЮДРАСПОБР}(0,01; 12) = 3,055$ .

Оскільки розраховане значення  $t$ -статистики більше критичного  $13,59 > 3,055$ , то коефіцієнт кореляції можна вважати значимим на обраному рівні  $\alpha = 0,01$ .

**Висновок.** Між рівнем механізації праці та її продуктивністю на підприємствах, що досліджувалися, існує сильний додатній зв'язок: чим більше рівень механізації праці, тим вище її продуктивність. Висновок дійсний для всіх підприємств такого типу.

### 16.3. Множинний та частинний коефіцієнти кореляції

У випадку, коли досліджуваний об'єкт або явище характеризується більш ніж двома ознаками  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , необхідно вивчати множинні залежності [11]. Для оцінки сили зв'язку між певною ознакою  $X_i$  та усіма іншими ознаками слугує **множинний коефіцієнт кореляції**, який позначається  $R_i$ .

Для розрахунку **множинного коефіцієнта кореляції** необхідно:

1) Побудувати матрицю парних коефіцієнтів кореляції  $r_{ij}, i = \overline{1, k}$  між ознаками  $X_i$  та  $X_j$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} \end{pmatrix}. \quad (16.5)$$

2) Знайти визначник  $|A|$  матриці  $A$  та алгебраїчне доповнення  $A_{ii}$  елемента  $r_{ii}$  цієї матриці.

3) Розрахувати множинний коефіцієнт кореляції за формулою:

$$R_i = \sqrt{1 - \frac{|A|}{A_{ii}}} . \quad (16.6)$$

Перевірка статистичної значущості множинного коефіцієнта кореляції здійснюється за допомогою t-статистики, яка розраховується за формулою:

$$t = \frac{R^2(n-k)}{(1-R^2)(k-1)}, \quad (16.7)$$

де  $n$  – кількість взаємопов'язаних значень ознак  $X_i, i = \overline{1, k}$ .

Розраховане значення t-статистики порівнюється з критичним значенням  $F_{крит}$ .  $F_{крит}$  – табличне значення розподілу Фішера (наявні додатки табличних значень, зокрема, електронні), яке також можна знайти за допомогою вбудованої статистичної функції Excel **FRASПОБР** ( $\alpha; l_1; l_2$ ), де  $\alpha$  – обраний дослідником рівень значущості,  $l_1; l_2$  – степені вільності,  $l_1 = k - 1; l_2 = n - k$ .

Якщо розраховане значення t-статистики більше критичного  $|t| > F_{крит}$ , то множинний коефіцієнт кореляції вважається значимим на обраному рівні значущості  $\alpha$ .

У випадку, коли необхідно дослідити кореляційний зв'язок між ознаками  $X_i$  та  $X_j, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}$ , із множини ознак  $X_1, X_2, \dots, X_k$  досліджуваного об'єкту або явища, вільний від впливу всіх інших ознак, розраховується *частинний коефіцієнт* кореляції, який позначається  $R_{ij}$ .

Для розрахунку *частинного коефіцієнта кореляції* необхідно:

- 1) Побудувати матрицю парних коефіцієнтів кореляції  $A$ .
- 2) Знайти алгебраїчні доповнення  $A_{ii}, A_{jj}, A_{ij}$  елементів  $r_{ii}, r_{jj}, r_{ij}$  відповідно.

3) Розрахувати частинний коефіцієнт кореляції за формулою:

$$R_{ij} = \frac{-A_{ij}}{\sqrt{A_{ii}A_{jj}}} . \quad (16.8)$$

Перевірка статистичної значущості частинного коефіцієнта кореляції здійснюється за допомогою t-статистики, яка розраховується за формулою:

$$t = \frac{R_{ij} \sqrt{n - k + 2}}{\sqrt{1 - R_{ij}^2}}, \quad (16.9)$$

де  $n$  – кількість взаємопов'язаних значень ознак  $X_i, i = \overline{1, k}$ .

Розраховане значення t-статистики порівнюється з критичним значенням  $t_{\text{крит}}$ .  $t_{\text{крит}}$  – табличне значення розподілу Стюдента, яке також можна знайти за допомогою вбудованої статистичної функції Excel **СТЮДРАСПОБР** ( $\alpha; l$ ), де  $\alpha$  – обраний дослідником рівень значущості,  $l$  – степені вільності,  $l = n - k + 2$ .

Якщо розраховане значення t-статистики більше критичного  $|t| > t_{\text{крит}}$ , то частинний коефіцієнт кореляції вважається значимим на обраному рівні значущості  $\alpha$ .

*Зауваження.* 1. Вважається, що для коректного використання множинного і частинного коефіцієнтів кореляції необхідно, щоб вибіркові дані мали сумісний нормальний розподіл, однак перевірка цієї умови на практиці зазвичай не виконується, оскільки пов'язана зі значними труднощами у розрахунках.

2. Замість парного коефіцієнта кореляції Пірсона можна використовувати також парний коефіцієнт кореляції Спірмена.

3. Кореляційна матриця завжди симетрична відносно головної діагоналі, оскільки  $r_{ij} = r_{ji}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}$ . Елементи головної діагоналі завжди дорівнюють 1, оскільки вони є коефіцієнтами кореляції  $X_i$  та  $X_i$ .

Відповідно до рівня значущості розглядається часткова класифікація кореляційних зв'язків:

1) висока значима кореляція – для  $r$ , який відповідає рівню статистичної значущості  $\alpha \leq 0,01$ ;

2) значима кореляція – для  $r$ , який відповідає рівню статистичної значущості  $\alpha \leq 0,05$ ;

3) тенденція достовірного зв'язку – для  $r$ , який відповідає рівню статистичної значущості  $\alpha \leq 0,1$ ;

4) незначима кореляція – при  $r$ , який не досягає рівня статистичної значущості.

#### 16.4. Побудова прямих регресії

Нехай  $X$  і  $Y$  – випадкові величини [12], зв'язок між якими треба вивчити. В результаті  $n$  випробувань отримали  $n$  точок  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ .

Вибіркові середні та дисперсії позначимо  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}_x^2, \bar{s}_y^2$ . За оцінку коефіцієнта кореляції  $\rho = \rho(X, Y)$  можна взяти

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\bar{s}_x \bar{s}_y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n \bar{s}_x \bar{s}_y} \quad (16.10)$$

за невеликої кількості випробувань.

Аналогічно визначаються рівняння вибірових прямих регресії: прямої регресії  $Y$  на  $X$

$$y - \bar{y} = r \frac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x} (x - \bar{x}) \quad (16.11)$$

і прямої регресії  $X$  на  $Y$

$$x - \bar{x} = r \frac{\bar{s}_x}{\bar{s}_y} (y - \bar{y}). \quad (16.12)$$

Прямі регресії доцільно шукати у тому випадку, коли точки  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) групуються навколо деякої прямої.

#### *Завдання для самоконтролю*

1. Коефіцієнт кореляції Пірсона, його властивості.
2. Пояснити побудову множинного коефіцієнта кореляції.
3. Побудова частинного коефіцієнтів кореляції.
4. Побудова прямих регресії, їх особливості.
5. Пояснити застосування функцій програмного забезпечення Ексел для розв'язування практичних задач кореляційного аналізу.

## Індивідуальні завдання

**Завдання 1.** За експериментальними даними вимірювань [13], де  $\Delta E$  – колірні відмінності виміряного кольору від еталонного значення,  $D$  – оптична густина фарби, 80, 40 – розтискування растрової точки ( $80+k$ , вказано  $k$ ) при стабільній подачі фарби та зволожувального розчину та при коригуванні подачі фарби автоматизованою системою контролю параметрів відбитка визначити силу зв'язку між обраними факторами та порівняти їх.

*Дані вимірювань при стабільній подачі фарби та зволожувального розчину*

Відбиток	3 ділянка				4 ділянка				5 ділянка				6 ділянка			
	$\Delta E$	$D$	80	40	$\Delta E$	$D$	80	40	$\Delta E$	$D$	80	40	$\Delta E$	$D$	80	40
5	16,24	0,89	4	5	16,99	0,88	5	5	14,15	0,96	4	6	10,83	1,06	5	6
5	11,75	0,96	4	5	13,38	0,95	4	5	12,51	0,99	4	5	9,78	1,08	5	6
10	16,11	0,89	5	7	16,86	0,87	5	6	14,45	0,93	5	6	11,38	1,03	5	7
10	12,84	0,96	4	6	13,84	0,92	4	5	12,57	0,96	4	6	9,84	1,06	5	7
15	16,31	0,87	5	7	17,10	0,86	5	7	14,09	0,94	5	7	11,26	1,03	6	7
15	12,73	0,95	5	6	14,17	0,91	5	6	13,34	0,96	4	6	10,22	1,05	5	7
20	15,37	0,89	4	6	15,99	0,88	5	6	14,11	0,93	5	6	11,20	1,02	5	6
20	12,76	0,98	5	5	13,64	0,93	4	6	12,79	0,99	4	6	10,43	1,06	5	6
25	12,96	0,95	4	7	12,90	0,96	5	6	11,37	1,01	5	7	9,06	1,09	5	7
25	10,75	1,02	5	7	12,09	0,99	5	7	11,15	1,02	5	7	8,90	1,09	6	8
30	13,93	0,93	5	7	14,47	0,92	5	6	12,88	0,97	5	7	9,99	1,06	5	7
30	11,53	0,99	5	6	12,96	0,96	4	6	11,97	1,01	4	6	9,63	1,08	5	7
35	14,46	0,91	5	7	15,79	0,89	5	6	13,64	0,94	5	7	10,36	1,05	5	7
35	12,05	0,97	5	6	14,02	0,93	5	6	12,96	0,96	4	6	10,13	1,06	5	7
40	14,59	0,91	5	7	16,20	0,86	5	6	13,90	0,93	5	7	11,15	1,02	5	7
40	12,10	0,97	5	7	13,40	0,94	4	6	12,96	0,96	4	6	10,49	1,04	5	7

Відбиток	7 ділянка				8 ділянка				9 ділянка				10 ділянка			
	$\Delta E$	$D$	80	40	$\Delta E$	$D$	80	40	$\Delta E$	$D$	80	40	$\Delta E$	$D$	80	40
5	8,70	1,13	5	7	5,68	1,26	5	7	3,28	1,36	6	8	2,34	1,44	6	9
5	6,76	1,18	5	6	4,37	1,29	6	7	2,93	1,40	6	8	2,97	1,53	7	10
10	8,62	1,12	5	7	5,84	1,22	5	8	3,32	1,34	6	8	1,59	1,45	7	10
10	7,10	1,16	5	7	4,79	1,28	6	8	2,79	1,37	7	9	2,62	1,52	8	10
15	8,46	1,11	6	9	5,69	1,23	6	9	3,01	1,34	7	9	1,73	1,46	7	10
15	7,60	1,17	5	8	5,00	1,26	6	9	3,14	1,40	7	9	3,14	1,54	8	11
20	8,43	1,12	6	7	5,43	1,23	5	8	3,03	1,35	6	8	1,85	1,43	7	10
20	7,48	1,16	5	7	4,61	1,28	6	8	2,80	1,40	6	9	2,94	1,54	8	11
25	6,97	1,16	6	9	4,92	1,26	6	9	2,87	1,37	6	10	2,34	1,46	8	11
25	6,32	1,19	6	9	4,73	1,29	6	9	3,06	1,41	8	11	3,18	1,55	9	13
30	7,81	1,14	5	7	4,97	1,26	6	8	2,99	1,37	6	9	2,48	1,48	7	10

30	7,35	1,16	5	8	4,76	1,31	6	9	2,77	1,43	7	11	2,66	1,52	9	12
35	8,03	1,14	5	7	5,42	1,25	6	9	3,20	1,38	6	10	2,78	1,49	7	11
35	7,66	1,17	5	7	4,65	1,29	6	9	3,07	1,42	7	9	3,51	1,59	9	12
40	8,71	1,11	6	7	5,74	1,23	6	9	3,37	1,36	6	9	2,75	1,48	7	10
40	7,58	1,15	5	7	5,02	1,27	6	8	2,97	1,43	7	10	3,31	1,58	8	11

Відбиток	11 ділянка				12 ділянка				13 ділянка				14 ділянка			
	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40
5	2,68	1,52	7	10	3,31	1,58	8	10	3,64	1,55	9	10	3,54	1,57	8	10
5	4,03	1,65	9	11	4,76	1,69	9	11	4,03	1,69	9	12	4,56	1,68	10	12
10	2,11	1,52	7	10	3,19	1,53	9	11	3,24	1,55	9	11	2,94	1,55	9	11
10	3,66	1,64	9	12	4,58	1,70	10	12	4,58	1,65	9	12	4,48	1,66	10	12
15	2,38	1,53	8	11	3,18	1,56	9	12	2,97	1,55	9	12	2,41	1,52	9	11
15	3,88	1,65	9	12	4,88	1,68	10	13	4,67	1,64	10	13	4,52	1,64	9	12
20	2,47	1,53	7	11	3,41	1,58	9	11	3,19	1,55	9	11	2,59	1,55	9	11
20	4,17	1,66	9	12	4,88	1,73	10	12	4,97	1,70	9	13	4,42	1,67	10	14
25	3,02	1,54	8	11	3,54	1,57	9	12	3,28	1,56	9	12	2,55	1,50	9	12
25	4,29	1,65	10	13	4,80	1,68	10	14	4,35	1,62	10	14	3,87	1,61	10	12
30	3,34	1,56	8	11	4,04	1,60	9	11	3,66	1,57	9	11	2,99	1,54	8	11
30	4,40	1,68	9	13	5,08	1,69	10	13	4,33	1,63	10	12	3,93	1,65	10	13
35	3,59	1,55	8	12	4,18	1,60	9	12	3,93	1,57	9	11	3,06	1,53	8	10
35	4,65	1,67	10	14	5,66	1,74	11	15	4,76	1,68	9	13	4,35	1,66	10	12
40	3,48	1,53	8	13	3,64	1,58	10	12	3,89	1,56	9	12	3,13	1,53	8	12
40	4,76	1,67	10	14	5,39	1,72	10	14	4,90	1,66	10	13	4,16	1,65	10	12

Відбиток	15 ділянка				16 ділянка				17 ділянка			
	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40
5	3,46	1,55	8	9	3,18	1,51	8	9	3,12	1,48	7	9
5	4,40	1,68	9	10	3,59	1,65	8	10	3,10	1,59	8	9
10	2,60	1,52	8	10	2,13	1,48	8	9	2,33	1,44	7	9
10	3,57	1,62	10	11	3,15	1,57	8	10	2,60	1,52	8	9
15	1,87	1,49	7	11	1,84	1,46	7	10	1,92	1,41	7	10
15	3,53	1,62	9	12	2,93	1,56	8	9	2,57	1,51	8	9
20	2,04	1,49	7	10	1,75	1,44	7	9	2,09	1,39	7	8
20	3,54	1,59	9	12	2,63	1,55	8	11	2,28	1,51	8	9
25	2,11	1,45	7	11	2,47	1,41	7	9	3,37	1,33	7	10
25	3,15	1,55	10	12	2,31	1,50	8	10	2,78	1,42	7	9
30	2,25	1,48	7	9	2,67	1,38	7	9	3,62	1,33	6	9
30	3,03	1,57	9	11	2,06	1,51	7	10	2,76	1,41	7	9
35	2,43	1,47	6	10	2,92	1,37	7	8	4,21	1,30	7	8
35	3,21	1,56	8	11	2,32	1,47	7	10	3,45	1,40	7	9
40	2,55	1,44	7	10	2,97	1,36	7	9	4,31	1,29	6	10
40	3,00	1,54	8	11	2,23	1,44	7	9	3,40	1,36	7	9

*Дані вимірювань при коригуванні подачі фарби  
автоматизованою системою контролю параметрів відбитка*

Відбиток	3 ділянка				4 ділянка				5 ділянка				6 ділянка			
	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40
1	11,97	1,02	6	9	13,19	0,98	7	9	11,67	1,03	7	9	9,36	1,11	7	9
1	9,90	1,08	6	8	11,35	1,04	6	8	11,10	1,07	6	8	8,70	1,14	6	9
101	11,25	1,05	6	10	12,45	1,01	6	9	10,96	1,07	7	10	8,58	1,15	7	10
101	9,45	1,10	6	8	11,42	1,06	6	9	10,74	1,09	6	9	8,50	1,16	7	10
201	11,96	1,03	6	10	12,37	1,02	6	9	10,97	1,06	7	10	8,69	1,14	7	10
201	9,54	1,09	6	8	11,04	1,06	6	9	10,39	1,10	6	9	8,09	1,16	7	10
301	9,23	1,11	7	10	9,96	1,10	6	9	8,20	1,15	7	10	6,42	1,23	7	10
301	7,38	1,18	7	9	8,25	1,15	6	9	7,82	1,20	6	11	5,54	1,25	8	10
401	8,34	1,15	7	11	7,77	1,16	8	13	6,81	1,21	7	11	4,98	1,28	8	13
401	5,41	1,25	8	10	6,76	1,23	7	10	5,70	1,26	7	10	4,23	1,33	8	12

Відбиток	7 ділянка				8 ділянка				9 ділянка				10 ділянка			
	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40
1	7,08	1,19	7	10	4,60	1,29	7	10	1,83	1,41	8	12	1,02	1,53	9	15
1	6,43	1,22	7	10	3,80	1,33	7	11	0,76	1,49	9	13	1,78	1,61	10	14
101	6,35	1,23	7	12	3,77	1,33	8	12	1,74	1,43	8	14	1,38	1,56	10	16
101	6,10	1,22	7	11	3,23	1,34	8	12	0,65	1,46	9	17	1,63	1,63	11	16
201	6,70	1,21	7	11	3,98	1,33	8	12	1,60	1,43	9	14	1,31	1,55	11	15
201	5,72	1,27	7	11	3,35	1,36	8	13	0,67	1,51	10	13	1,98	1,64	11	16
301	4,82	1,29	7	11	3,36	1,35	8	14	1,32	1,45	8	14	1,04	1,51	10	16
301	4,33	1,33	8	11	2,64	1,41	8	12	0,59	1,52	9	13	1,82	1,63	11	15
401	4,03	1,31	8	12	2,49	1,38	9	14	1,34	1,44	9	14	1,12	1,51	11	17
401	3,36	1,37	8	11	1,99	1,42	8	13	0,51	1,52	10	14	1,52	1,59	11	16

Відбиток	11 ділянка				12 ділянка				13 ділянка				14 ділянка			
	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40	ΔE	D	80	40
1	3,01	1,64	10	15	3,44	1,61	12	16	2,34	1,57	11	15	0,99	1,53	10	14
1	3,57	1,69	12	15	4,44	1,75	12	16	3,54	1,67	11	15	2,02	1,62	11	14
101	3,42	1,63	11	18	4,01	1,68	12	18	2,27	1,59	12	17	0,62	1,50	11	14
101	4,04	1,76	13	17	4,33	1,75	13	18	2,63	1,66	11	16	1,00	1,58	11	15
201	3,06	1,64	11	18	4,27	1,70	12	17	2,48	1,60	11	16	0,67	1,53	10	15
201	4,40	1,77	13	17	4,79	1,81	13	17	3,07	1,69	11	16	1,17	1,60	11	15
301	2,28	1,60	10	17	2,23	1,59	11	16	0,95	1,54	11	17	1,50	1,46	9	13
301	3,24	1,70	12	17	3,26	1,72	13	17	1,81	1,63	10	16	0,52	1,55	10	14
401	2,05	1,58	11	19	1,91	1,57	11	16	0,58	1,49	10	17	1,75	1,43	10	15
401	2,32	1,67	11	17	2,58	1,65	11	16	1,17	1,56	10	15	0,97	1,49	9	15

Відбиток	15 ділянка				16 ділянка				17 ділянка			
	$\Delta E$	D	80	40	$\Delta E$	D	80	40	$\Delta E$	D	80	40
1	1,46	1,42	9	12	3,65	1,33	8	12	4,96	1,28	7	11
1	0,54	1,50	9	13	1,81	1,42	9	12	3,58	1,34	7	11
101	2,74	1,38	8	13	5,88	1,24	8	12	8,11	1,17	7	11
101	2,16	1,42	9	13	4,90	1,33	8	12	6,86	1,21	7	10
201	2,78	1,38	8	12	5,81	1,26	7	11	7,98	1,17	7	11
201	2,21	1,43	9	13	4,57	1,32	8	11	6,75	1,23	8	11
301	4,05	1,31	8	13	6,13	1,24	7	11	7,86	1,17	7	11
301	2,73	1,39	9	12	5,39	1,31	8	11	6,88	1,22	7	11
401	4,19	1,32	8	13	5,54	1,26	8	12	6,27	1,22	8	12
401	2,62	1,40	9	13	4,29	1,32	8	11	5,25	1,26	8	11

**Завдання 2.** За експериментальними даними вимірювань проаналізувати обчислені значення, зробити висновки. Аналогічно опрацювати зібрані статистичні дані.



## Тема 17. Статистичні гіпотези

### 17. 1. Поняття про статистичні гіпотези. Перевірка гіпотези про вид закону розподілу досліджуваної величини

На основі статистичних даних при розв'язуванні практичних задач необхідно зробити припущення про вигляд закону розподілу випадкової величини  $X$ . При цьому для остаточного вирішення питання про вигляд закону розподілу доцільно перевірити, наскільки зроблене припущення узгоджується з дослідними даними. Через обмежену кількість спостережень емпіричний закон розподілу, зазвичай, в деякій мірі, відрізняється від передбачуваного, навіть, якщо припущення про вигляд закону розподілу виявилось правильним. В зв'язку з цим виникає наступна задача: чи розбіжність між емпіричним і передбачуваним (теоретичним) законом розподілу є наслідком обмеженості числа спостережень, а чи вона є істотною і пов'язана з тим, що істинний закон розподілу випадкової величини суттєво відрізняється від передбачуваного. Для розв'язування цієї задачі служать так звані «критерії згоди» [12].

«Критерієм згоди» називають критерій перевірки гіпотези про передбачуваний вигляд закону розподілу, наприклад, критерії згоди: Колмогорова, Пірсона (критерій  $\chi^2$ ), Романовського та інші.

При застосуванні певних статистичних методів обробки даних вибірки часто ставляться вимоги до розподілу даних або до числових характеристик.

**Статистичною гіпотезою** називається будь-яке припущення про властивості досліджуваної величини, висунуте на основі статистичних даних.

За змістом статистичні гіпотези можна віднести до таких типів:

- 1) Гіпотези про вид закону розподілу досліджуваної величини.
- 2) Гіпотези про числові характеристики досліджуваної величини.
- 3) Гіпотези про рівність числових характеристик досліджуваних величин.
- 4) Гіпотези про належність досліджуваних величин до однієї генеральної сукупності.

5) Гіпотези про вид моделі, що описує взаємозв'язок між досліджуваними величинами.

6) Гіпотези про належність досліджуваних величин до одного класу.

Прийняття основної або однієї з альтернативних гіпотез здійснюється на основі дослідження статистичних даних. Дослідження проводиться за певним критерієм, який обирається відповідно до змісту гіпотези і виду наявних статистичних даних.

Якщо сформульовані гіпотези  $H_0$  – основна та  $H_1$ , як альтернативна (конкуруюча), і обраний критерій перевірки справедливості основної гіпотези, то прийняття  $H_0$  означає відкидання  $H_1$ , а відкидання  $H_0$  означає справедливість  $H_1$ .

Оскільки прийняття гіпотези здійснюється на основі статистичних даних, то завжди існує ймовірність помилки.

Ймовірність відкидання гіпотези  $H_0$ , якщо вона справедлива, називається ймовірністю *помилки першого роду* або *рівнем значущості*, який позначається  $\alpha$ . Величина  $1 - \alpha$  є ймовірністю прийняття справедливої гіпотези і називається *рівнем надійності*.

Ймовірність прийняття гіпотези  $H_0$ , якщо вона не вірна, називається ймовірністю *помилки другого роду* і позначається  $\beta$ . Величина  $1 - \beta$  є ймовірністю відкидання невірної гіпотези і називається *потужністю критерію*.

Чим менше рівень значущості, тим менше ймовірність відкинути вірну гіпотезу. Зазвичай рівень значущості обирається дослідником рівним 0,1; 0,05; 0,01 або 0,001. Якщо, наприклад, обраний рівень значущості  $\alpha = 0,01$ , то ризик відкинути вірну гіпотезу виникає в одному випадку із ста.

Перевірка статистичної гіпотези не надає точного висновку щодо її вірності або невірності. *Прийняття гіпотези означає, що на прийнятому рівні значущості вона не протирічить статистичним даним.*

Перевірка статистичних гіпотез зазвичай здійснюється за такими етапами

1) Висунення припущень про вид розподілу досліджуваної величини

(величин) або про її числові характеристики.

- 2) Формулювання статистичних гіпотез.
- 3) Вибір критерію перевірки відповідно до змісту гіпотез і статистичних даних.
- 4) Вибір рівня значущості залежно від вимог до точності результатів дослідження.
- 5) Розрахунок значення обраного критерію за статистичними даними.
- 6) Порівняння розрахованого значення критерію з його критичним значенням і прийняття або відкидання основної гіпотези.

Перевірка гіпотези про вид закону розподілу досліджуваної величини має велике значення для прикладних досліджень. Необхідність такої перевірки виникає при виборі критерію, оскільки для багатьох з них висувається вимога нормального розподілу статистичних даних.

Отриманий на основі вибірових даних статистичний ряд називається **емпіричним законом розподілу** величини  $X$ .

За даними статистичного ряду можна знайти числові характеристики, які є вибіровими параметрами закону розподілу  $X$ . Вид закону розподілу визначається відповідно до умов здобуття вибірки або залежно від виду графіка емпіричної щільності розподілу (гістограми) у випадку неперервної випадкової величини  $X$  і полігону частот, якщо величина  $X$  дискретна. Параметри обраного закону розподілу замінюються відповідними вибіровими параметрами.

Закон розподілу випадкової величини  $X$ , параметрами якого є відповідні вибірові числові характеристики, називається **теоретичним законом розподілу**.

При здійсненні такої заміни немає впевненості, що закон розподілу обраний правильно. Тому розроблено процедуру, яка дозволяє оцінити ступінь відповідності обраного закону даним вибірки. Критерії, в яких формулюється лише одна гіпотеза  $H_0$ , і необхідно перевірити, чи узгоджуються статистичні дані з цією гіпотезою, чи ні, називають **критеріями згоди**. Найбільш відомим з яких є **критерій Пірсона  $\chi^2$**  (хі-квадрат).

Для критерію Пірсона  $\chi^2$  обчислюється за формулою значення

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}, \quad (17.1)$$

де  $n_i'$  – частоти, отримані за теоретичним законом розподілу (теоретичні частоти).

З формули (17.1) видно, що у випадку, коли відповідні теоретичні та емпіричні частоти співпадають,  $\chi^2 = 0$ . Отже, чим ближче  $\chi^2$  до нуля, тим краще узгоджуються вибіркові дані та обраний теоретичний закон розподілу.

Розраховане значення критерію  $\chi^2$  порівнюється з його критичним значенням  $\chi^2_{\alpha, l}$ , яке знаходиться за статистичними таблицями або за допомогою вбудованої статистичної функції Excel **ХИ2ОБР** ( $\alpha, l$ ). Параметри функції **ХИ2ОБР**:  $\alpha$  – рівень значущості;  $l$  – степені вільності,  $l = k - r - 1$ , де  $k$  – кількість груп емпіричного розподілу,  $r$  – кількість параметрів теоретичного розподілу (наприклад, для нормального розподілу  $r = 2$ , оскільки параметрів два –  $\mu$  і  $\sigma$ ). Якщо  $\chi^2 < \chi^2_{\alpha, l}$ , то гіпотеза про закон розподілу приймається. У противному випадку гіпотеза відкидається.

Також використовують інші критерії, наприклад, за критерієм Романовського розглядають величину

$$a = \frac{|\chi^2 - l|}{\sqrt{2l}},$$

де  $l$  – степені вільності. Якщо  $a \geq 3$ , то розбіжність між теоретичними та дослідними даними слід вважати не випадковою. Якщо  $a < 3$ , то таку розбіжність можна вважати випадковою, тобто емпіричні дані узгоджуються з обраним теоретичним розподілом.

Перевірка гіпотези про закон розподілу величини  $X$  здійснюється за такими пунктами:

- З генеральної сукупності  $X$  здобувається вибірка і будується статистичний ряд.

- Висувається гіпотеза про закон розподілу випадкової величини  $X$ .
- Знаходяться вибіркові параметри обраного закону розподілу.
- Розраховуються теоретичні частоти.
- Розраховується критерій  $\chi^2$  за відповідною формулою.
- Обирається рівень значущості  $\alpha$  (або рівень надійності  $\gamma$ ) і знаходиться критичне значення  $\chi^2_{\alpha, l}$  (або  $\chi^2_{\gamma, l}$ ).
- Порівнюються розраховане і критичне значення критерію  $\chi^2$  і робиться висновок про справедливість висунутої гіпотези.

## 17.2. Критерій згоди $\chi^2$ про вигляд нормального розподілу

Важливою є *центральна гранична теорема* – теорема теорії ймовірності про збіжність розподілу суми незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального розподілу. Центральна гранична теорема пояснює велике поширення нормального закону розподілу і є теоретичною основою його застосування для багатьох практичних задач: *за широких припущень сума великого (але скінченного) числа незалежних випадкових величин розподілена згідно із законом, близьким до нормального*. Наприклад, на відлагодженому виробництві якість продукції змінюється за нормальним законом внаслідок того, що виробнича похибка є результатом сумарної дії великого числа випадкових величин.

*Якщо випадкова величина формується під впливом багатьох незалежних факторів, кожен з яких здійснює на неї незначний вплив, то розподіл цієї величини близький до нормального*. Отже, важливими є вміння перевірки відповідності вибірових даних нормальному розподілу.

Для перевірки справедливості основної статистичної гіпотези  $H_0$  потрібно:

- 1) визначити гіпотезу  $H_1$ , альтернативну до гіпотези  $H_0$ ;
- 2) обрати статистичну характеристику перевірки;
- 3) визначити допустиму ймовірність похибки першого роду, тобто рівень значущості  $\alpha$ ;

4) знайти за відповідною таблицею критичну область (критичну точку) для обраної статистичної характеристики.

До критичної області належать такі значення статистичної характеристики, при яких гіпотеза  $H_0$  відхиляється на користь альтернативної гіпотези  $H_1$ .

Критерій згоди  $\chi^2$  можна використовувати для будь-яких розподілів. Розглянемо його для перевірки гіпотези  $H_0$ : генеральна сукупність має нормальний закон розподілу  $N(a, \sigma^2)$ , де  $a = \bar{x}$ ,  $\sigma^2 = s^2$ .

Розбиваємо числову вісь на  $r$  інтервалів, що не перетинаються:  $h_1, h_2, \dots, h_r$ ;  $n_i$  – кількість елементів вибірки, що потрапили в інтервал  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Позначимо через  $p_i = P(X \in h_i)$ ; тоді  $np_i$  – теоретичні частоти. За формулою обчислення ймовірності

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \quad (17.2)$$

для нормального розподілу одержимо при  $a = \bar{x}$ ,  $\sigma = s$ ,  $h_i = (x_i, x_{i+1})$

$$p_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right).$$

За критерій перевірки гіпотези  $H_0$  беруть величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}. \quad (17.3)$$

Кількість  $k$  степенів вільності дорівнює  $k = r - l - 1$ , де  $l$  – кількість параметрів розподілу. Для нормального розподілу  $k = r - 3$ .

За умови справедливості нульової гіпотези з даним рівнем значущості  $\alpha$  і кількістю степенів вільності  $k$  за таблицею розподілу  $\chi^2$  знаходимо критичну точку  $\chi^2_{k;\alpha}$  з рівності  $P(\chi^2 > \chi^2_{k;\alpha}) = \alpha$ . Якщо  $\chi^2 < \chi^2_{k;\alpha}$ , то гіпотеза  $H_0$  приймається, якщо  $\chi^2 \geq \chi^2_{k;\alpha}$ , то гіпотеза  $H_0$  відхиляється. У випадку, коли гіпотеза відкидається, необхідно, по-перше, збільшити обсяг вибірки (кількість іспитів) і провести нову перевірку, якщо й це не допоможе, то треба знайти інший вираз для закону розподілу.

Отже, для того, щоб при заданому рівні значущості  $\alpha$  перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, треба:

1. Обчислити вибіркву середню  $\bar{x}$  і вибіркве середнє квадратичне відхилення  $\sigma$ .

2. Обчислити теоретичні частоти.

3. Порівняти емпіричні і теоретичні частоти за допомогою одного із критеріїв, наприклад, критерію Пірсона, для якого обчислити значення критерію за формулою (17.3).

4. За таблицею критичних точок розподілу  $\chi^2$  за заданим рівнем значущості  $\alpha$  та числу степенів вільності знаходять критичну точку  $\chi^2_{k;\alpha}$  та роблять відповідні висновки стосовно зробленої гіпотези.

Якщо ознака  $X$  генеральної сукупності має неперервний розподіл імовірностей, то теоретичні частоти обчислюються за формулою

$$n'_i = np_i,$$

де  $n$  – обсяг вибірки, а  $p_i$  – імовірність того, що випадкова величина  $X$  потрапить в  $i$ -й частковий інтервал. Вона обчислюється в загальному випадку за формулами того закону розподілу, який припускаємо на основі обробки статистичного розподілу вибірки.

Якщо є підстави для припущення, що ознака генеральної сукупності  $X$  має нормальний закон розподілу, то теоретичні частоти можна обчислювати за наведеними далі формулами

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma} \cdot \varphi(u_i) = \frac{nh}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \bar{x}_B)^2}{2\sigma^2}}, \quad (17.4)$$

де  $n$  – обсяг вибірки;  $h$  – довжина часткового інтервалу;  $\bar{x}_B$  – вибірква середня величина;  $\sigma$  – вибіркве середнє квадратичне відхилення;  $\varphi(u_i)$  – щільність ймовірностей для загального нормального закону розподілу або за

$$n'_i = n \cdot \left( \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_B}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma}\right) \right), \quad (17.5)$$

де  $\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_B}{\sigma}\right)$ ,  $\Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma}\right)$  – функції Лапласа.

### 17.3. Статистична обробка експериментальних даних

Дані вимірювань з перших трьох текстових накладів, друкування яких здійснювалось в різні дні декілька разів по 100 відбитків, використано для перевірки підлягання отриманих значень у вибірках нормальному закону розподілу за критерієм Пірсона.

Розглядається [28] приклад перевірки нормальному розподілу вибірки з вимірювання значень, отриманих на ділянці дії фарбового ножа № 3 для тесту, де вимірювання було проведено на відбитку № 90, для якого значення можна вважати стабілізованими, але і можна продовжити ще налаштування. В таблиці наведено дані проведених вимірювань, де  $\Delta E$  – колірні відмінності виміряного кольору від еталонного значення,  $D$  – оптична густина фарби;  $\Delta S$  відн 80%, 40% – розтискування растрової точки (зміна відносної площі друкувальних елементів при стабільній подачі фарби та зволожувального розчину).

Таблиця 1

Результати вимірювання відбитка з тестовим зображенням

№ вимірювання	$\Delta E$	$D$	$\Delta S$ відн 80%	$\Delta S$ відн 40%
1	2	3	4	5
1	16,24	0,89	5	6
2	16,11	0,89	5	7
3	16,21	0,86	5	7
4	16,25	0,89	4	7
5	16,19	0,93	4	7
6	16,18	0,9	5	7
7	16,31	0,91	5	7
8	16,17	0,97	5	7
9	16,2	0,91	5	7



<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
10	16,12	0,9	5	7
11	16,22	0,92	4	7
12	16,18	0,94	5	7
13	16,23	0,88	5	7
14	16,09	0,89	5	6
15	16,25	0,93	5	7
16	16,17	0,89	4	7
17	16,21	0,87	4	7
18	16,25	0,89	5	7
19	16,19	0,92	4	7
20	16,16	0,93	5	7
21	16,2	0,89	5	7
22	16,19	0,95	5	6
23	16,28	0,93	5	7
24	16,13	0,91	4	7
25	16,17	0,9	5	7
26	16,2	0,91	5	7
27	16,28	0,93	5	7
28	16,15	0,91	5	7
29	16,17	0,9	4	7
30	16,2	0,91	5	7
31	16,12	0,9	4	7
32	16,22	0,92	5	7
33	16,18	0,94	4	7
34	16,29	0,88	5	7
35	16,09	0,89	5	7
36	16,25	0,93	5	6

37	16,11	0,89	5	7
38	16,21	0,87	5	7
39	16,09	0,89	5	7
40	16,24	0,9	5	7
41	16,11	0,89	4	7
42	16,31	0,87	5	7
43	16,25	0,89	4	7
44	16,19	0,92	5	7
45	16,22	0,88	5	6
$\bar{x}$	16,2	0,9	4,73	6,89
$\Sigma$	0,0596	0,0234	0,4539	0,2939

У наведеній вище таблиці одразу подано пораховані значення середнього арифметичного значення вибірки та середньоквадратичного відхилення кожної досліджуваної величини за відомими формулами середнього вибіркового та вибіркової дисперсії.

Розглянемо критерій згоди Пірсона для перевірки гіпотези  $H_0$ : генеральна сукупність має нормальний закон розподілу  $N(a, \sigma^2)$ , де  $a = \bar{x}$ ,  $\sigma^2 = s^2$ .

За даними таблиці для кожної виміряної величини висуваємо гіпотезу  $H_0$  – гіпотеза про нормальний закон розподілу, хоча, як видно із побудованих гістограм (рис. 17.1), для кольорних відмінностей виміряного кольору від еталонного значення та оптичної густини фарби маємо подібний вигляд щільності функції нормального розподілу, а для розтискування растрової точки можна допустити помилку.

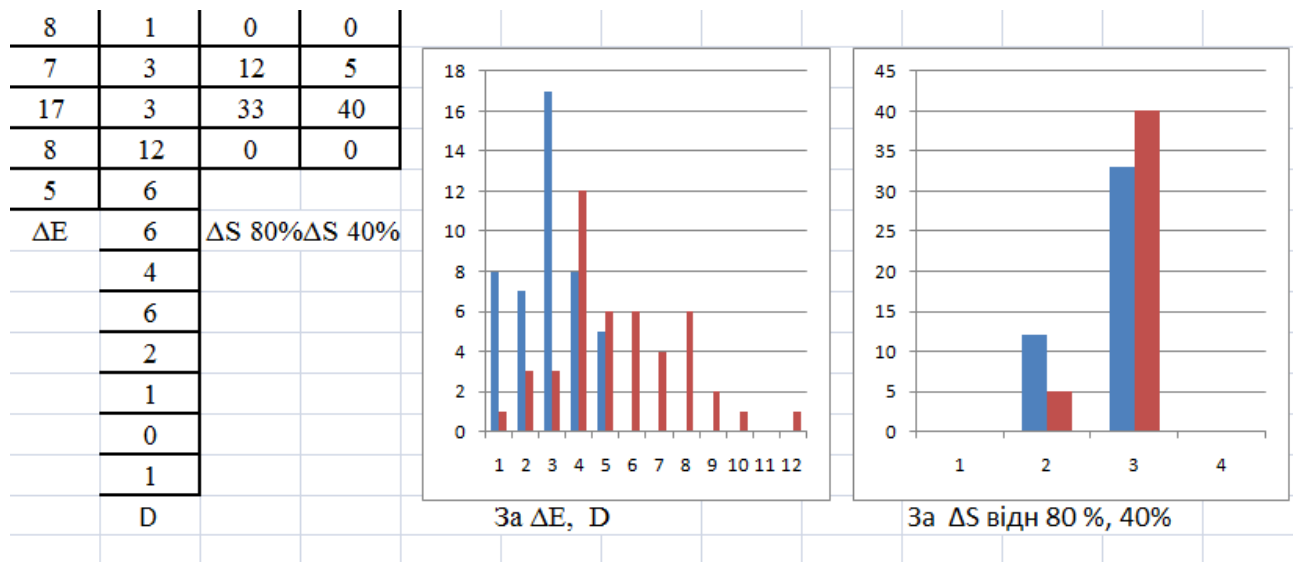


Рис.17.1. Витяг з MS Excel: гістограми за вимірними даними.

Аналогічно опрацьовані всі дані для інших показників, які далі занесені в таблиці.

Згідно з описаною методикою розрахунку за критерієм Пірсона, визначено інтервали для кожної з вибірок (для  $\Delta E$ ,  $D$ ,  $\Delta S$  відн 80 % та  $\Delta S$  відн 40 %) та кількість значень, що у них потрапляють. Розраховано ймовірності потрапляння випадкового значення у задані інтервали відповідно до очікуваного середнього значення та середньоквадратичного відхилення, використовуючи функцію пакету MS Excel **НОРМРАСП**( $x$ ;  $x_{cp}$ ;  $\sigma$ ; 1), також значення величини  $\chi^2$ -статистики.

Розраховане значення слід порівняти з критичним, яке також зручно обчислюється за формулою в MS Excel **ХИ2ОБР**( $\alpha$ ;  $k$ ). Для кожної з вибірок кількість степенів вільності буде дещо відрізнятись, наприклад, для вибірки за  $\Delta E$   $k = 2$ , для вибірки за  $D$   $k = 9$ , а для вибірок за  $\Delta S$  відн 80 % та  $\Delta S$  відн 40 %  $k = 1$ .

У всіх випадках розрахунки показують, що значення величин  $\chi^2$  є меншими за значення  $\chi^2_{\text{крит}}$  ( $5,723 < 5,99146$ ;  $12,39 < 16,9189$ ;  $2,837 < 3,8414$ ;  $1,007 < 3,8414$ ), тому гіпотеза про відповідність вибірок нормальному закону розподілу приймається.

В табл. 2, 3 та 4 показані проведені розрахунки відповідності нормальному розподілу вибірки даних за  $D$ , за  $\Delta S$  відн 80 % та  $\Delta S$  відн 40 %.

Таблиця 2

Розрахунок відповідності нормальному розподілу вибірки за  $D$ 

Знач. $\Delta E$	К-ть елем.	$x_{i \min}$	$x_{i \max}$	$P(x_{i \min})$	$P(x_{i \max})$	$p_i$	$np_i$	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,86	1,00	0,855	0,865	0,017	0,045	0,028	1,3	-0,3	0,067
0,87	3,00	0,865	0,875	0,045	0,103	0,058	2,6	0,4	0,050
0,88	3,00	0,875	0,885	0,103	0,201	0,098	4,5	-1,5	0,494
0,89	12,00	0,885	0,895	0,201	0,340	0,139	6,4	5,6	4,936
0,9	6,00	0,895	0,905	0,340	0,506	0,166	7,6	-1,6	0,335
0,91	6,00	0,905	0,915	0,506	0,607	0,165	7,5	-1,5	0,318
0,92	4,00	0,915	0,925	0,670	0,807	0,137	6,3	-2,3	0,823
0,93	6,00	0,925	0,935	0,807	0,902	0,095	4,4	1,6	0,620
0,94	2,00	0,935	0,945	0,902	0,957	0,027	2,5	-0,5	0,111
0,95	1,00	0,945	0,955	0,957	0,984	0,011	1,2	-0,2	0,042
0,96	0,00	0,955	0,965	0,984	0,995	0,004	0,5	-0,5	0,498
0,97	1,00	0,965	0,975	0,995	0,999	0,004	0,2	0,8	4,098

 $n=45$  $\Sigma=0,982$  $\chi^2 = 12,390$  $n^*=46$  $\chi^2_{\text{крит}} = 16,91897762$  $k=9,00$ 

Таблиця 3

Розрахунок відповідності нормальному розподілу вибірки за  $\Delta S$  відн 80 %

Знач. $\Delta E$	К-ть елем.	$x_{i \min}$	$x_{i \max}$	$P(x_{i \min})$	$P(x_{i \max})$	$p_i$	$np_i$	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3,00	0,00	2,5	3,500	0,000	0,003	0,003	0,1	-0,1	0,148
4,00	12,00	3,500	4,500	0,003	0,304	0,300	13,5	-1,5	0,170
5,00	33,00	4,500	5,500	0,304	0,954	0,651	29,3	3,7	0,470
6,00	0,00	5,500	6,500	0,954	1,000	0,046	2,0	-2,0	2,049

 $n=45$  $\Sigma=1,000$  $\chi^2=2,837$

$$n^*=45$$

$$\chi^2_{\text{крит}}=3,841459149$$

$$k=1,00$$

Таблиця 4

Розрахунок відповідності нормальному розподілу вибірки за  $\Delta S$  відн 40 %

Знач. $\Delta E$	К-ть елем.	$x_{i \min}$	$x_{i \max}$	$P(x_{i \min})$	$P(x_{i \max})$	$p_i$	$np_i$	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	0,00	4,5	5,500	0,000	0,000	0,000	0,0	0,0	0,000
6	5,00	5,500	6,500	0,000	0,093	0,093	4,2	0,8	0,161
7	40,00	6,500	7,500	0,093	0,981	0,888	40,0	0,0	0,000
8	0,00	7,500	8,500	0,981	1,000	0,019	0,8	-0,8	0,846

$$n=45$$

$$\Sigma=1,000$$

$$\chi^2=1,007$$

$$n^*=45$$

$$\chi^2_{\text{крит}}=3,841459149$$

$$k=1,00$$

Отже, вже на відлагодженому поліграфічному виробництві, де досягнуто в деякій мірі збалансований стан між фарбою і зволожуючим розчином, що зберігає стабільність на формі, на накатних фарбових валиках і на офсетному полотні із дотриманням загальних вимог до основних показників зволожуючого розчину (водневий показник; загальна жорсткість; електропровідність; температура у блоці охолодження та в зволожуючому апараті) якість продукції змінюється за нормальним законом.

Загальновідомо, при проведенні вимірювань на його результат впливає достатня кількість чинників, які породжують похибки вимірювань: грубі, систематичні та випадкові. Випадкові похибки виникають внаслідок великої кількості різних причин, які не підлягають точному врахуванню і дають у кожному окремому випадку інше значення. Кожна з причин породжує при вимірюванні невелику похибку  $v_i$ , при додаванні яких сумарна похибка

$$V = \sum_{i=1}^n v_i \quad - \quad \text{випадкова величина є сумою великої кількості незначних}$$

незалежних одна від одної випадкових величин і згідно з наслідком теореми

Ляпунова має нормальний розподіл. Припускаючи, що немає грубих і систематичних помилок (їх уникають дотриманням правил використання вимірювальних приладів, заміною недосконалих приладів, грамотністю виконавця, тощо), можна вважати, що результат вимірювання є випадкова величина  $X$ , математичне сподівання якої  $\bar{x}$  дорівнює істинному значенню  $a$  вимірюваної випадкової величини  $M(X) = a$ .

Оскільки сумарна похибка  $V = X - a$  підпорядковується нормальному закону розподілу, то можливий результат вимірювання  $X = a + V$  теж є нормальним законом. Отже, важливими є вміння перевірки відповідності вибіркового даних, отриманих в результаті експериментальних досліджень, нормальному розподілу. На відлагодженому виробництві якість продукції змінюється за нормальним законом внаслідок того, що виробнича похибка є результатом сумарної дії великого числа випадкових величин.

### ***Завдання для самоконтролю***

1. Основні типи гіпотез.
2. Описати схему перевірки статистичних гіпотез.
3. Ознайомитись із різними критеріями згоди [11], [12].
4. Пояснити використання одного із критеріїв згоди для нормального закону розподілу.
5. Опрацювати критерії згоди для рівномірного розподілу та закону Пуассона [11], [12].
6. Пояснити застосування функцій програмного забезпечення Excel для опрацювання статистичних даних.

### ***Індивідуальні завдання***

**Завдання 1.** За експериментальними даними вимірювань (попередня тема), де  $\Delta E$  – колірні відмінності вимірюваного кольору від еталонного значення,  $D$  – оптична густина фарби, 80, 40 – розтискування растрової точки ( $80 + k$ , вказано  $k$ ) при стабільній подачі фарби та зволожувального розчину та при коригуванні подачі фарби автоматизованою системою контролю параметрів

відбитка побудувати гістограми (до коригування подачі фарби та після, вибравши один із показників), висунути гіпотезу про вид розподілу та перевірити її за критерієм згоди.

**Завдання 2.** За даними вимірювань, зібраними своїми даними у відповідності до магістерської роботи, перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу.

## Табличне диференціювання

## I. Таблиця похідних основних функцій

1.  $(x^n)' = nx^{n-1}.$

2.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$

3.  $(\sin x)' = \cos x.$

4.  $(\cos x)' = -\sin x.$

5.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

6.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

7.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$

8.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$

9.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

10.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

11.  $(a^x)' = a^x \ln a.$

12.  $(e^x)' = e^x.$

13.  $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$

14.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x} \quad (x > 0, a > 0).$

15.  $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$

16.  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

17.  $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

18.  $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

II. Основні правила обчислення похідної. Якщо  $C$  – стала величина і  $u = \varphi(x)$ ,  $v = \psi(x)$  – диференційовані функції, тоді

1)  $(C)' = 0,$

2)  $(x)' = 1,$

3)  $(u \pm v)' = u' \pm v',$

4)  $(Cu)' = Cu',$

5)  $(uv)' = u'v + uv',$

6)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0),$

7)  $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$

III. Правило диференціювання складеної функції. Якщо  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ , тобто  $y = f[\varphi(x)]$ , де функції  $y$  і  $u$  мають похідні, тоді

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

або в інших позначеннях  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$



## Таблиця основних інтегралів

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \quad \left( \int dx = x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \right).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$13. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$14. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$21. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$22. \int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$$

Формула Ньютона-Лейбніца  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі:  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$

### Функція багатьох змінних

$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$  – похідна за змінною  $x$ ,  $y$  – стала;

$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$  – похідна за змінною  $y$ ,  $x$  – стала.

$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  – похідна 2-го порядку за змінною  $x$ ;

$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  – похідна 2-го порядку за змінною  $y$ ;

$z''_{xy} = (z'_y)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  – мішана похідна 2-го порядку за змінними  $x, y$ .

### Диференціальні рівняння

*Диференціальні рівняння 1-го порядку:*

З відокремлюваними змінними:  $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ , розв'язок

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C.$$

Лінійне неоднорідне  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ ;  $y = uv$ ,  $y' = u'v + uv'$  – метод Бернуллі.

*Диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами (однорідні):*

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Характеристичне рівняння  $k^2 + pk + q = 0$  та загальний розв'язок рівняння в залежності від коренів:

$$1) \text{ дійсні } k_1 \neq k_2: y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

$$2) k_{1,2} = \alpha \pm i\beta: y = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x);$$

$$3) k_1 = k_2 = k: y = e^{kx} (C_1 + C_2 x).$$

## Список літератури

### Список основної літератури

1. Васильченко І. П. та ін. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч посібник: У двох книгах. Книга 2/ І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, А. І. Лобанов, Є. Ю. Таран. – друге видання зі змінами. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – изд. 4-е. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 512 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II. Учеб. пособие для вузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 1997. – 416 с.
4. Дж. Мэльяуз, Р. Уокер. Математические методы физики. Пер. с англ. – М.: Атомиздат, 1972. – 400 с.
5. Лавренчук В. П. та ін. Диференціальні рівняння математичної фізики: Навчальний посібник / В. П. Лавренчук, С. Д. Івасишен, В. С. Дронь, Т. І. Готинчан. – 2-е вид., випр. – Чернівці: Рута, 2005. – 191 с.
6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1985. – Т.2. – 560 с.
7. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Ч.2. – Київ, 1981. – 456 с.
8. Поліщук Н. В. Моделювання засобами векторної алгебри і теорії поля поліграфічних процесів: конспект лекцій для студентів напряму підготовки 8.05150102, 8.05150103, 8.05150104 «Технології електронних мультимедійних видань», «Комп'ютерні технології та системи видавничо-поліграфічних виробництв», «Матеріали видавничо-поліграфічних виробництв» Видавничо-поліграфічного інституту / Н. В. Поліщук; НТТУ «КПІ», 2013.- 82 с. – Доступ: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/4931>.
9. Кушлик-Дивульська О. І. Рівняння математичної фізики для опису процесів поліграфічної технології. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи для студентів видавничо-поліграфічного інституту./

Уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел. – НМУ № 10/11-408, 2011. – 112 с.

10. Кушлик-Дивульська О. І. Рівняння математичної фізики для опису процесів поліграфічної технології. Навчальний посібник: [ел. навч. вид.] / О. І. Кушлик-Дивульська / – Київ, НТУУ «КПІ», 2012. – 177 с. (НМУ № Е 11/12-218).

11. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт (комп'ютерного практикуму) з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» для студентів напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент» студентів Видавничо-поліграфічного інституту [Електронний ресурс]: НТУУ «КПІ»; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Б. Р. Кушлик. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,60 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2016. – 205 с. – Назва з екрана. – Доступ : <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/17693>.

12. Кушлик-Дивульська О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабальук. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с. – Назва з екрана. – Доступ : – <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/18378>.

13. Кушлик Б. Р. Стабілізація друкування малотиражної продукції офсетним друком : монографія / Б. Р. Кушлик, О. І. Кушлик-Дивульська ; за заг. ред. О. М. Величко. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2017. – 162 с.

14. Івасишен С. Д. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, Г. В. Івасюк та ін. – Чернівці: Вид. дім «РОДОВІД», 2015. – 358 с.

15. Журавська В. Г. Методи розв'язування задач математичної фізики: навч. посіб. для інженер. спец. / Г. В. Журавська, О. Б. Качаєнко, О. В. Кузьма та ін. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 228 с.

16. 10161372\_rivnyannya\_matematichnoi\_fiziki\_(chatina\_1) . – Назва з екрана.

17. 10161803\_rivnyannya\_matematichnoi\_fiziki\_(chatina\_2) . – Назва з екрана.

### **Список рекомендованої додаткової літератури**

18. Величко О. М. Опрацювання інформаційного потоку взаємодією елементів друкарського контакту: Монографія. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2005. – 264 с.

19. Грицько Б. Математичне моделювання розподілу температури в середовищі з нелінійною поведінкою матеріалу / Б. Грицько, Р. Гудзь, Л. Журавчак / Вісник Львів. Ун-ту. Вип. 17. С. 73-84.

20. Кохановський В.О. Теоретичні питання надійності електротехнічних комутуючих пристроїв поліграфічних машин / В.О. Кохановський / Технологія і техніка друкарства. – Київ, 2008. №1(19). С. 105-109.

21. Кузнецов Э. Г. Определение поля давления в смазочном слое торцового газозатворного уплотнения импульсного типа / Э.Г. Кузнецов / Технологія і техніка друкарства. – Київ, 2004. - № 4(6). С. 78-85.

22. Литунів С. Н. К вопросу о развитии трафаретной печатной техники / С. Н. Литунів / Технологія і техніка друкарства. – Київ, 2005. - №3-4(9-10). С. 28-32.

23. Регей І.І. Наукові основи розроблення енергоощадної технології і засобів виготовлення розгорток картонного пакування: автореф. дисертації на здобуття наукового ступеня докт. техн. наук./ І.І. Регей . – Львів, 2007 – заголовок з екрану «<http://referatu.com.ua/referats/7569/173161>».

24. Стахів І.І., Ю.П. Рак, Я.І. Проць. Моделі аркушетранспортуючих систем у гнучких автоматизованих технологічних лініях поліграфії./ заголовок з екрану « [www.nbul.gov.ua/portal/natural/nn/2002\\_2009/statti/vup20/20-2/39.pdf](http://www.nbul.gov.ua/portal/natural/nn/2002_2009/statti/vup20/20-2/39.pdf)»

25. Шийка Ю. Енергетичні функції в задачах масштабування з врахуванням вмісту растрових зображень / Ю. Шийка, Р. Шувар / Теоретична електротехніка. – Львів, 2009. Вип. 60. С. 139-146.

26. Яхно О.М. Математична модель динаміки росту парової фази (перенесення теплоти в рідині, зміна зовнішнього тиску, вплив теплофізичних параметрів, поля швидкостей і тиску біля бульбашки) / О.М. Яхно, В.Р. Кулінченко., В.Л. Зав'ялов, Т.Г. Мисюра / Технологія і техніка друкарства. – Київ, 2016. – №3(13). С. 49-58.

27. Ткаченко Д.С. Иллюстрационный материал.1. Применение ряда Фурье для аппроксимации изображений: МИФИ. каф. Высшей математики/ заголовок з екрану «[http://tkachenko\\_mephi.narod.ru/pdfs/ia.pdf](http://tkachenko_mephi.narod.ru/pdfs/ia.pdf)».

28. Кушлик-Дивульська О. І. Принципи статистичного аналізу показників при аналізі якості відбитків плоского офсетного друку/ О. І. Кушлик-Дивульська, Б. Р. Кушлик // Технологія і техніка друкарства. – К.: ВПІ НТУУ «КПІ». – 2017. – №1(55). – С. 10-20.

29. Кушлик Б.Р. Удосконалення технології друкування малотиражної продукції плоским офсетним друком: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.01/К., НТУУ «КПІ», 2014.–190с. – Бібліогр.: с. 134-148.

30. Скиба В.М. Тиражна стабільність друкарських форм / В.М. Скиба // Технологія і техніка друкарства. – К.: ВПІ НТУУ «КПІ». – 2015. – №1(47). – С.30-39.

31. Кушлик-Дивульська О.І. Математична теорія оптимального керування в практичних задачах / О.І. Кушлик-Дивульська, Б.Р. Кушлик / Технологія і техніка друкарства. – К.: ВПІ НТУУ «КПІ». – 2015. – №1(47). – С. 61 -68.

32. Зоренко Я.В. Параметри тонових оригіналів у сучасних методах кольоровідтворення / Я.В. Зоренко // Технологія і техніка друкарства. – К.: ВПІ НТУУ «КПІ». – 2015. – №1(47). – С.24-29.

33. Морфлюк В.Ф. Цифрові засоби статистичного визначення та формування бази даних характеристик зволожувальних розчинів з антибактеріальними властивостями / В.Ф. Морфлюк, І.С. Карпенко, В.Г. Чуркін // Технологія і техніка друкарства. – К.: ВПІ НТУУ «КПІ». – 2016. – №2(52). – С.75 -84.

## Зміст

Передмова.....	3
<b>Розділ I. Теорія рядів.....</b>	<b>5</b>
<b>Тема 1. Числові ряди. Ознаки збіжності знакододатних числових рядів.</b>	
Дослідження збіжності числових рядів.....	5
1.1. Основні поняття для числового ряду.....	5
1.2. Ознаки збіжності знакододатних числових рядів.....	6
1.3. Збіжність рядів з довільними членами.....	8
Завдання для самоконтролю.....	10
Індивідуальні завдання.....	10
<b>Тема 2. Функціональні ряди. Степеневі ряди, їх використання в</b>	
практичних задачах.....	14
2.1. Основні поняття та теореми для функціонального ряду.....	14
2.2. Область збіжності степеневих рядів. Теорема Абеля.....	16
2.3. Розклад функції в степеневі ряди. Ряд Тейлора.....	17
Завдання для самоконтролю.....	22
Індивідуальні завдання.....	23
<b>Тема 3. Розвинення функцій в ряд Фур'є. Використання рядів Фур'є для</b>	
технологічних процесів в поліграфії.....	27
3.1. Ряд Фур'є за тригонометричною системою функцій.....	27
3.2. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій.....	29
3.3. Ряд Фур'є для $2l$ -періодичної функції.....	30
Завдання для самоконтролю.....	34
Індивідуальні завдання.....	35
<b>Розділ II. Рівняння математичної фізики.....</b>	<b>38</b>
<b>Тема 4. Постановка задач математичної фізики.....</b>	<b>38</b>
4.1. Основні поняття та задачі математичної фізики.....	38
4.2. Постановка типових задач математичної фізики.....	41
4.2.1. Лінійна задача про поширення тепла.....	41
4.2.2. Рівняння дифузії.....	44

4.2.3. Задачі поширення тепла у просторі.....	45
4.2.4. Рівняння малих поперечних коливань струни.....	45
4.2.5. Поперечні коливання мембрани.....	48
4.2.6. Задачі гідродинаміки та поширення звукових хвиль.....	48
4.2.7. Стаціонарні задачі для теплових полів.....	49
Завдання для самоконтролю.....	49
Індивідуальні завдання.....	50
<b>Тема 5. Типи диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку у випадку двох незалежних змінних.....</b>	<b>60</b>
5.1. Типи диференціальних рівнянь.....	60
5.2. Зведення диференціальних рівнянь до канонічного вигляду.....	62
Завдання для самоконтролю.....	65
Індивідуальні завдання.....	65
<b>Тема 6. Метод Даламбера для вільних коливань струни.....</b>	<b>70</b>
6.1. Метод характеристик для рівняння коливання струни.....	70
6.2. Фізичне пояснення формули Даламбера, її використання.....	73
Завдання для самоконтролю.....	75
Індивідуальні завдання.....	75
<b>Тема 7. Розв'язування рівняння коливань струни методом Фур'є.....</b>	<b>77</b>
7.1. Розв'язування рівняння коливань струни, закріпленої на її кінцях...77	77
7.2. Розв'язування рівняння коливань струни, закріпленої на одному кінці, та рухомим іншим.....	82
Завдання для самоконтролю.....	84
Індивідуальні завдання.....	84
<b>Тема 8. Вимушені коливання скінченної струни.....</b>	<b>87</b>
8.1. Метод Фур'є для вимушених коливань скінченної струни.....	87
8.2. Мішані задачі з стаціонарними неоднорідностями.....	91
Завдання для самоконтролю.....	94
Індивідуальні завдання.....	95
<b>Тема 9. Вільні коливання прямокутної мембрани.....</b>	<b>96</b>



9.1. Метод відокремлення змінних вільних коливань прямокутної мембрани.....	96
9.2. Застосування методу відокремлення змінних.....	100
Завдання для самоконтролю.....	102
Індивідуальні завдання.....	103
<b>Тема 10.</b> Одновимірне рівняння теплопровідності. Метод Фур'є.....	107
10.1. Постановка задач для рівняння теплопровідності.....	107
10.2. Інтегрування першої мішаної задачі для одновимірного рівняння теплопровідності.....	108
Завдання для самоконтролю.....	116
Індивідуальні завдання.....	117
<b>Тема 11.</b> Мішані задачі для рівняння теплопровідності і задачі зі стаціонарними неоднорідностями.....	120
11.1. Інтегрування мішаних задач для рівнянь теплопровідності.....	120
11.2. Мішані задачі для напівнескінченного стержня з теплоізованою бічною поверхнею.....	127
Завдання для самоконтролю.....	130
Індивідуальні завдання.....	130
<b>Тема 12.</b> Задачі Коші для одновимірного рівняння теплопровідності. Двовимірна мішана задача.....	132
12.1. Постановка задачі Коші для параболічних рівнянь, її розв'язування.....	132
12.1.1. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є) для задачі Коші в одновимірному випадку.....	132
12.1.2. Задача Коші в $n$ -вимірному просторі.....	135
12.2. Двовимірні мішані задачі.....	139
12.3. Перша мішана крайова задача для параболічного рівняння в крузі.....	140
Завдання для самоконтролю.....	143
Індивідуальні завдання.....	144

<b>Тема 13. Крайові задач для рівнянь еліптичного типу.....</b>	<b>148</b>
13.1. Постановка основних крайових задач.....	148
13.2. Крайові задачі для прямокутних областей. Метод Фур'є.....	150
13.3. Метод власних функцій.....	154
Завдання для самоконтролю.....	165
Індивідуальні завдання.....	165
<b>Тема 14. Крайові задачі для кругових областей.....</b>	<b>167</b>
14.2. Рівняння Лапласа. Метод спуску для рівняння Пуассона .....	167
14.2. Задача Неймана.....	174
Завдання для самоконтролю.....	175
Індивідуальні завдання.....	176
<b>Тема 15. Теорія потенціалу. Застосування математичних моделей для практичних задач на поліграфічному виробництві.....</b>	<b>177</b>
15.1. Основні види потенціалів, їх властивості.....	177
15.2 Задача Діріхле для рівняння Лапласа.....	181
Завдання для самоконтролю.....	183
Індивідуальні завдання.....	183
<b>Розділ III. Елементи математичної статистики.....</b>	<b>185</b>
<b>Тема 16. Кореляційний зв'язок між досліджуваними величинами.....</b>	<b>185</b>
16.1. Кореляційний аналіз, опрацювання даних.....	185
16.2. Коефіцієнт кореляції Пірсона.....	189
16.3. Множинний та частинний коефіцієнти кореляції.....	193
16.4. Побудова прямих регресії.....	196
Завдання для самоконтролю.....	196
Індивідуальні завдання.....	197
<b>Тема 17. Статистичні гіпотези.....</b>	<b>201</b>
17.1. Поняття про статистичні гіпотези. Перевірка гіпотези про вид закону розподілу досліджуваної величини.....	201
17.2. Критерій згоди $\chi^2$ про вигляд нормального розподілу.....	205
17.3. Статистична обробка експериментальних даних.....	208

Завдання для самоконтролю.....	214
Індивідуальні завдання.....	214
Додаток 1.Табличне диференціювання.....	216
Додаток 2. Таблиця основних інтегралів.....	217
Додаток 3. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння.....	218
Список літератури. Список основної літератури.....	219
Список рекомендованої додаткової літератури.....	221
Зміст.....	223